

Untersuchungen zur magnetischen Rekonnexion in dreidimensionalen Systemen

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Fakultät für Physik und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von

MICHAEL HESSE
aus Hagen

Bochum 1988



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546619_0023

Untersuchungen zur magnetischen Rekonnexion in dreidimensionalen Systemen

DISSERTATION

zur

Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der
Fakultät für Physik und Astronomie
an der Ruhr-Universität Bochum

von

MICHAEL HESSE
aus Hagen

Bochum 1988

Dissertation eingereicht am	09.05.1988
Tag der mündlichen Prüfung	29.06.1988
Referent	Prof. Dr. K. Schindler
Koreferent	Prof. Dr. K. Elsässer

Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Erstellung eines neuen Modells, welches magnetische Rekonnexion in allgemeinen dreidimensionalen Plasma-Magnetfeldkonfigurationen unter Einschluß von Fällen, wo das Magnetfeld keine Neutralpunkte besitzt, beschreibt.

Ausgegangen wird von der Frage, ob sich das bekannte *Vasyliunas'sche* Rekonnexionskonzept des Merging [Vasyliunas, 1975] in allgemeinen dreidimensionalen Plasma-Magnetfeldstrukturen als brauchbare Beschreibung erweist. Es zeigt sich anhand dreier verschiedener Beispiele, daß Merging diese Anforderung nicht erfüllen kann.

Im ersten Beispiel wird untersucht, ob es möglich ist, idealen Plasmatransport über die Separatrixflächen des lokalen Magnetfelds einer X-Linie zu erhalten, wenn das Magnetfeld auf der X-Linie nicht verschwindet. Dieses gelingt, obwohl ein derartiger Transport nach gängiger Auffassung unmöglich ist, weil eine Magnetfeldkomponente parallel zur X-Linie die lokale Feldtopologie ändert. Somit ist Merging hier nur in dem singulären Fall einer echten Neutrallinie anwendbar.

Die Bildung von Plasmoiden wird zum zweiten Beispiel des Bedarfs für ein neues Rekonnexionskonzept. Anhand eines neuen Plasmoidmodells, welches in generischer Weise Ergebnisse von Simulationen translationsinvarianter Modelle verallgemeinert, läßt sich zeigen, daß in einem frühen Stadium nach der Bildung das Plasmoidmagnetfeld vollständig vom gleichen topologischen Typ wie das Dipol-Magnetfeld der Erde ist. Daher ist auch hier Merging, welches auf dem Plasmafluß in Gebiete topologisch verschiedenen Magnetfeldes basiert, keine geeignete Beschreibung von magnetischer Rekonnexion.

Als drittes Beispiel wird ein neues Modell der an der Magnetopause beobachteten Rekonnexionsereignisse, der sogenannten Flux-Transfer-Events (FTEs) entwickelt. Beobachtungen [z.B. Paschmann *et al.*, 1982], die ergeben, daß magnetische Rekonnexion in FTEs von anderer Natur als X-Linien Rekonnexion sein muß, wird dadurch Rechnung getragen, daß das Modell vollständig ohne X-Linien und Neutralpunkte des Magnetfeldes konzipiert wird. Es ergibt sich, daß eine Flußspirale, wie in dem Modell vorgeschlagen, eine lokalisierte Öffnung der Magnetosphäre bewirken kann. Dies entspricht dem Bild der fleckenhaften

Rekonnexion ("Patchy Rekonnection"), die an der Magnetopause eine wichtige Rolle spielt [z.B. *Haerendel et al.*, 1978]. Da sich in der weiteren Untersuchung des Modells erweist, daß topologische Unterschiede innerhalb des FTE-Modells sich durch lokale Messungen nicht erkennen lassen und beliebig kompliziert werden, ist auch hier ein Rekonnexionsmodell, welches nicht auf der Topologie des Magnetfeldes allein aufbaut, erforderlich.

Die topologischen Eigenschaften magnetischer Rekonnexion lassen sich in geeigneter Weise verallgemeinern, indem die Topologie des Gesamtsystems aus Plasma und Magnetfeld erfaßt und betrachtet wird. Dieses führt über die mathematischen Eigenschaften magnetischer Linienenerhaltung zu einer topologischen Definition allgemeiner magnetischer Rekonnexion, welche die lokalisierte Verletzung der Topologieerhaltung des Gesamtsystems zur Basis hat.

Um die physikalischen Eigenschaften dieses neuen Rekonnexionsmodells zu finden, wird das Magnetfeld und das elektrische Feld durch Euler-Potentiale ausgedrückt, deren Existenz für die in dieser Arbeit relevanten Fälle bewiesen werden kann. Im Sinne eines kinematischen Modells können durch den Einbau eines verallgemeinerten Ohm'schen Gesetzes Gleichungen für die zeitliche Änderung der Euler-Potentiale auf der Bahn von Plasmaelementen hergeleitet werden. Es zeigt sich, daß die kinematische Beschreibung ähnlich wie in der Dynamo-Theorie [*Moffat*, 1978] einen neuen Rahmen für zukünftige dynamische Untersuchungen erstellt.

Durch die in diesem Formalismus beschriebene zeitliche Änderung der Werte der Eulerpotentiale auf den Trajektorien von verschiedenen Plasmaelementen lassen sich Sätze über magnetische Linien- und Flußerhaltung auf besonders einfache Weise beweisen. Mit diesen Ergebnissen kann magnetische Rekonnexion an X-Linien im Weiteren untersucht werden.

Die Euler-Potentialdarstellung erweist sich als besonders geeignet, allgemeine magnetische Rekonnexion in Magnetfeldern, die keine Neutralpunkte im betrachteten Gebiet besitzen, zu diskutieren. Der Ansatz basiert auf einer gezielten Verletzung der magnetischen Linienenerhaltung durch lokalisierte Abweichungen von der idealen Plasmaströmung. Diese neue Art magnetischer Rekonnexion, $B \neq 0$ -Rekonnexion, kann globale oder lokale Effekte haben. Bei globalen Effekten ändern Plasmaelemente tief in dem idealen

Gebiet ihre magnetische Verbindung und bei lokalen Effekten nur diejenigen Plasmaelemente, die durch die nichtideale Region selbst hindurchgelaufen sind.

Der Diskriminator zwischen den genannten Eigenschaften ist das zum Magnetfeld parallele elektrische Feld. Besitzt das parallele elektrische Feld ein nichtverschwindendes Integral entlang von Magnetfeldlinien, so hat $B \neq 0$ -Rekonnexion globale Effekte, ansonsten sind die Effekte lokal.

Bei globaler $B \neq 0$ -Rekonnexion und spontanen Prozessen existiert ein Zusammenhang mit einer neuen, verallgemeinerten magnetischen Helizität. Es läßt sich zeigen, daß spontane $B \neq 0$ -Rekonnexionsprozesse immer eine Änderung der verallgemeinerten magnetischen Helizität einschließen. Umgekehrt läßt sich aus der am Magnetfeld allein zu erkennenden Änderung der Helizität ableiten, ob ein spontaner Prozeß ein Rekonnexionsprozeß war. Da magnetische Helizität auf der globalen Topologie des Magnetfelds basiert, ist hiermit ein Zusammenhang zwischen allgemeiner magnetischer Rekonnexion und globaler Magnetfeldtopologie hergestellt.

Die Bedeutung allgemeiner magnetischer Rekonnexion wird innerhalb der schon erwähnten Plasmoid- und FTE-Modelle gezeigt. Dabei ergibt sich eine topologische Substrukturierung von magnetischen Flußspiralen, die in bisher vorhandenen Modellen nicht beschrieben werden kann. Für kleine Verscherung des umgebenden Feldes wird diese Substruktur vor allem in dem FTE-Modell extrem fein, so daß sich im Grenzfall eine praktisch stochastische Verteilung der Feldlinientopologie innerhalb der Struktur einstellt. Die sehr kleinen Skalen ermöglichen es, qualitativ einen Dissipationsmechanismus vorzuschlagen, der auf dem Feldlinientopologiewechsel von Plasmateilchen beruht.

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für theoretische Physik IV der Fakultät für Physik und Astronomie der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Professor Dr. K. Schindler bin ich für die Betreuung dieser Arbeit, sein stetes Interesse und zahlreiche Diskussionen und Anregungen sehr zu Dank verpflichtet. Herrn Professor Dr. K. Elsässer danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Für viele fruchtbare Diskussionen im Zusammenhang mit dieser Arbeit möchte ich den Herren Dr. J. Birn und Dr. A. Otto danken. Für die Unterstützung bei der Durchsicht des Manuskripts gebührt den Herren T. Neukirch, Dr. W. Zwingmann und U. Arendt, dessen Graphikprogramme außerdem in dieser Arbeit vielfältige Anwendung fanden, Dank.

Für die Übersetzung des Manuskripts in eine (Computer-) lesbare Form und die Erstellung und Überarbeitung der Abbildungen gilt mein Dank Frau Sigrid Heuer.

Besonders danke ich meinen Eltern für ihre Unterstützung und ihr Interesse an dem Fortschritt meiner Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Problemstellung	3
2. Euler-Potentiale	12
2.1 Einführung	12
2.2 Existenz der Euler-Potentiale	14
2.2.1 Existenz für singularitätenfreie Magnetfelder	14
2.2.2 Euler-Potentiale für Magnetfelder mit Singularitäten	20
2.3 Die Eichung der Euler-Potentiale	25
3. Die Dynamik der Euler-Potentiale	28
4. Magnetische Linien- und Flußerhaltung	32
5. Allgemeine magnetische Rekonnexion, topologischer Ansatz	37
5.1 Globale topologische Aspekte	37
5.2 Lokale topologische Aspekte	48
6 Magnetic Merging, $B=0$ -Rekonnexion	50
6.1 Einführung	50
6.2 Rekonnexion an X-Punkten im Euler-Potentialbild	51
6.3 Singularitäten der Euler-Potentialdarstellung	65
6.4 Globale topologische Struktur von Magnetfeldern mit Neutralpunkten und Anwendung auf die Magnetosphäre	74
7. $B \neq 0$ -Rekonnexion	82
7.1 Einführung	82
7.2 Die strukturelle Instabilität der Definition von "Magnetic Merging"	83
7.3 Rekonnexion in singularitätenfreien Magnetfeldern	87



7.4 Magnetische Helizität, Spontane Prozesse	92
8 Plasmoidformation in drei Dimensionen: Ein Beispiel für allgemeine magnetische Rekonnexion	97
9 Ein konzeptionelles Modell für $B \neq 0$ -Rekonnexion an der Magnetopause und Flux-Transfer-Events	120
10 Allgemeine magnetische Rekonnexion	136
11 Zusammenfassung und Diskussion	141
Literatur	150

1. Einleitung und Problemstellung

Im Jahre 1946 beschrieb *Giovanelli* in einer Arbeit über chromosphärische Flares, daß in der Umgebung eines Sonnenflecken, hervorgerufen durch den Einfluß magnetischer Felder anderer Sonnenflecken, Bedingungen herrschen, die die Existenz von Punkten ermöglichen, an denen das Magnetfeld verschwindet. An diesen Neutralpunkten, schloß *Giovanelli*, sei es aufgrund der vorliegenden Feldstruktur möglich, Atome durch beschleunigte Elektronen anzuregen.

Durch seinen Doktorvater *Hoyle* erfuhr *Dungey* von *Giovannellis* Idee. In seiner Dissertation verarbeitete *Dungey* das Konzept zu einem globalen Bild der Erdmagnetosphäre unter Einbeziehung zweier neutraler Punkte des Magnetfeldes. Arbeiten dazu erschienen in den Jahren 1953 und 1961 [*Dungey*, 1953, 1961].

Beginnend mit den ersten Arbeiten wurde magnetische Rekonnexion einerseits als ein Mechanismus gesehen, der in der Lage ist, Teilchenbeschleunigung durch Umwandlung magnetischer Energie in kinetische Energie des Plasmas zu erzielen [*Sweet*, 1958; *Parker*, 1957, 1963]. Andererseits wurde magnetische Rekonnexion auch als Möglichkeit erkannt, Plasma in Gebiete unterschiedlicher Topologie des Magnetfeldes innerhalb eines idealen Bereichs zu transportieren.

”Idealer Bereich” bezeichnet ein Gebiet, in dem das Magnetfeld $\mathbf{B}$, die Plasmageschwindigkeit $\mathbf{v}$ und das elektrische Feld $\mathbf{E}$ durch das ideale Ohm’sche Gesetz

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$$

[z.B. *Jackson*, 1962] verknüpft sind. Gültigkeit des idealen Ohm’schen Gesetzes impliziert die magnetische Flußerhaltung, die auch als Eingefrorenheit des Plasmas in das Magnetfeld bezeichnet wird [z.B. *Jackson*, 1962]. Magnetische Flußerhaltung gilt, wenn der magnetische Fluß durch jede geschlossene, mit der Strömungsgeschwindigkeit mittransportierte Kurve zeitunabhängig ist.

Die Systeme, in denen Rekonnexion ein wichtiger Prozeß sein kann, sind fast ideal. Dies bedeutet, daß das ideale Ohm’sche Gesetz in sehr guter Näherung im ganzen System mit Ausnahme einer lokalisierten nichtidealen Zone, in der Abweichungen von der Idealität bedeutsam werden können, erfüllt ist.

Ein Beispiel für ein fast ideales System ist die Magnetosphäre der Erde [z.B. *Vasyliunas*, 1975]. Wenn man nämlich die Magnetosphäre als vollständig ideal beschreiben könnte, so könnte kein Plasma aus dem Sonnenwind, d.h. dem interplanetaren Raum, in die Magnetosphäre gelangen, weil die Eingefrorenheit der Feldlinien in das Plasma einen derartigen Übergang verbietet.

Tatsächlich aber erfordert die beobachtete Schweifstruktur der Magnetosphäre mit einer zentralen Plasmaschicht und deren Aktivität, die zu Plasmaverlust durch Ejektion von großen Teilen der Plasmaschicht durch Plasmoide führt [z.B. *Hones*, 1984], neben ionosphärischem Plasma auch eine Zufuhr von Plasma aus dem Sonnenwind. Tatsächlich würde Idealität die Ejektion von Plasmoiden ebenfalls verbieten, da im Zuge dieses Prozesses das Plasma den Bereich dipolartiger Feldlinien wieder verläßt.

Als Konsequenz muß ein Mechanismus existieren, der es erlaubt, die Eingefrorenheit des Plasmas zu verletzen ohne globale Abweichungen von der Idealität zu erfordern. Dieser Gedankengang ist die Motivation der *Vasyliunas'schen* Definition magnetischer Rekonnexion [*Vasyliunas*, 1975]:

Merging, oder magnetische Rekonnexion, ist der Prozeß, wodurch Plasma in einem idealen Gebiet über eine Fläche fließt, die Gebiete topologisch verschiedener Feldlinien trennt.

In der in den ersten theoretischen Ansätzen für ein Verständnis magnetischer Rekonnexion üblichen Näherung der dreidimensionalen Systeme durch translationsinvariante Approximationen entstehen topologische Unterschiede im allgemeinen dadurch, daß das Magnetfeld einen Neutralpunkt mit lokal hyperbolischer umgebender Feldstruktur, einen sogenannten X-Punkt, besitzt (Bild 1.1), oder daß ein solcher gebildet wird. Die Feldlinien, die von dem X-Punkt ausgehen oder darin enden, werden Separatzen genannt und trennen Gebiete topologisch unterschiedlicher Feldlinien. Es ist offensichtlich, daß ein Plasmatransport von einem Gebiet in das andere nur über die Separatrix erfolgen kann.

Magnetische X-Punkt Konfigurationen bestimmten den Rahmen intensiver theoretischer und beobachtender Untersuchungen. Erste theoretische Modelle für stationäre Rekonnexion an X-Punkten und X-Linien wurden gefunden von *Sweet*, [1958], *Parker* [1957, 1963] und *Petschek* [1964]. *Sweet* und *Parker* vernachlässigten in ihren Untersuchungen die Magnetfeldstärke stromabwärts des Plasmastroms. Dieser

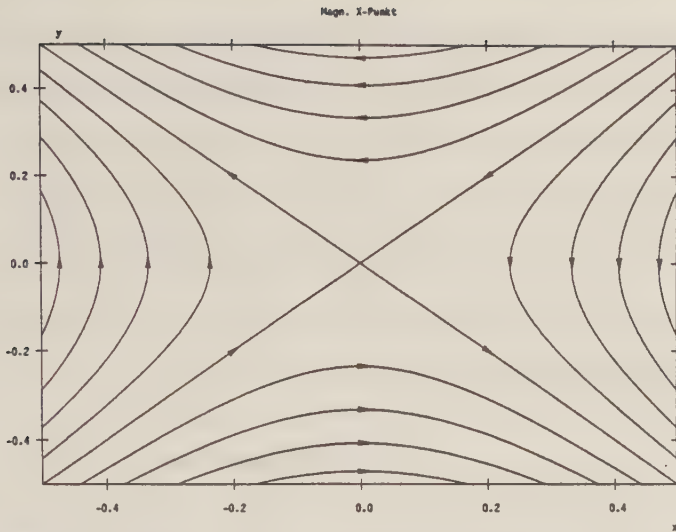


Bild 1.1 Magnetische Feldstruktur in der Umgebung eines X-Punktes.

Nachteil wurde vermieden von *Petschek*, der damit tatsächlich eine Neuverbindung von Feldlinien erhielt, deren Bewegung durch die Plasmabewegung definiert ist. Die Neuverbindung ist die Ursache für die Wahl der Bezeichnungen Rekonnexion und Merging. *Petscheks* Argumentation erschien teilweise mathematisch nicht vollständig überzeugend; exakte Lösungen von vereinfachten Systemgleichungen wurden von *Sonnerup* [1970] und *Yeh und Azford* [1970] geliefert. Weitere Modelle und verbesserte Beschreibungen stationärer X-Punkt Rekonnexion folgten [z.B. *Priest und Forbes*, 1986].

Auf der anderen Seite wurde aber auch zeitabhängige Rekonnexion untersucht. Ein Vorgang besonderen Interesses war die Tearing-Instabilität, d.h., der Einsatz von Rekonnexion durch spontane X-Punkt Bildung und das damit verbundene "Zerreißen" von Feldlinien.

Die erste Arbeit zur Tearing-Instabilität war eine theoretische Untersuchung im Rahmen der resistiven Magnetohydrodynamik (MHD) [*Furth et al.*, 1963]. Für die Magnetosphäre wurde die Tearing-Instabilität basierend auf der Nichtadiabasie der Ionen von *Schindler* [1974] vorausgesagt.

Die Bildung und Entwicklung von Plasmoiden in der Magnetosphäre wird heute im allgemeinen als

Tearingprozeß verstanden. Die Plasmoidentwicklung ist im nichtlinearen Bereich numerisch im Rahmen der resistiven MHD zuerst von *Birn* [1980] verfolgt worden, später von *Hautz* und *Scholer* [1987] und in verbesserten Konfigurationen von *Otto* [1987].

So läßt sich zum heutigen Zeitpunkt sagen, daß Rekonnexion an magnetischen X-Punkten ein wohlverstandener Prozeß ist, der in astrophysikalischen und auch in Laborsystemen vielfältige Anwendung gefunden hat [z.B. *Cowley*, 1976; *Galeev* und *Zelenyi*, 1976; *Paschmann et al.*, 1979; *Baum* und *Bratenahl*, 1980; *Sonnerup et al.*, 1981; verschiedene Arbeiten in *Hones*, 1984; *Schindler*, 1984; *Taylor*, 1986; *Priest* und *Forbes*, 1986; *Schindler* und *Birn*, 1986; *Strauss*, 1988].

Obwohl sich X-Punkt Rekonnexion in einer Vielzahl von Fällen als brauchbares Konzept erwiesen hat, bleiben doch eine Reihe von offenen Fragen. Die grundlegende Unklarheit ist, ob sich ein Konzept, welches vor allem für translationsinvariante, also hochgradig symmetrische Systeme geeignet scheint, auch für die möglicherweise sehr viel komplizierteren dreidimensionalen, in vielen Vorgängen in der Plasmaphysik und Plasma-Astrophysik relevanten Strukturen benutzen läßt.

Die Entwicklung dreidimensionaler Strukturen in astrophysikalischen Plasmen wurde bisher nur sehr selten erfolgreich modelliert. Als Beispiel für ein solches Modell sei die numerische Simulation der globalen dreidimensionalen Plasmoidentwicklung von *Birn* und *Hones* [1984] genannt. Wie alle weiteren numerischen Untersuchungen dieser Art erlaubt die Simulation dreidimensionaler Plasmoids jedoch aufgrund der heute möglichen numerischen Auflösung nur in sehr beschränktem Maß Rückschlüsse über topologische Eigenschaften der untersuchten Struktur. So läßt sich zum Beispiel im Rahmen der durch die Numerik gegebenen Genauigkeit eine einzelne Feldlinie nicht hinreichend exakt integrieren.

Für eine dreidimensionale Verallgemeinerung existiert in der Literatur bisher nur ein einziges Beispiel [*Hughes* und *Sibeck*, 1987], wo Feldlinienverbindung in einem qualitativen Feldmodell eines dreidimensionalen Plasmoids diskutiert wird. Dieses Modell basiert lediglich auf einer Skizze der möglichen Feldkonfiguration, ohne einen formalen Ansatz für das Magnetfeld zu wählen.

Beobachtungsseitig gibt es auch an der Grenzschicht zwischen Magnetosphäre und interplanetarem Magnetfeld, der Magnetopause, neben Evidenz für stationäre X-Linien-Rekonnexion [z.B. *Paschmann et*

al., 1979] das Bild der "fleckenhaften" Rekonnexion ("Patchy Reconnection"), die besonders im Zusammenhang mit Flußröhren von spiralen den Feldlinien, die eine Verbindung zwischen magnetosphärischen und interplanetaren Magnetfeldlinien etablieren, diskutiert wird. Diese sogenannten Flux-Transfer-Events (FTEs) wurden entdeckt von *Russell und Elphic* [1979]. Da FTE-Beobachtungen typischerweise nicht die mit den X-Linien-Rekonnexionsmodellen verträglichen Plasmasignaturen liefern [z.B. *Paschmann et al.*, 1982, *Daly et al.*, 1984], ist es eine offene Frage, wie Rekonnexion in derartigen Phänomenen zu verstehen ist. Auch hierzu existieren außer zweidimensionalen Simulationen [*Fu und Lee*, 1986], die naturgemäß nur Schlüsse aus zweidimensionaler Topologie ziehen können, noch keine globalen dreidimensionalen Simulationen.

Der grundlegende Gedanke bei der klassischen X-Punkt oder X-Linien Rekonnexion ist, daß mit Hilfe einer lokalisierten Nichtidealität Plasma *senkrecht* zum Magnetfeld in Regionen verschiedener Topologie transportiert wird. Der Transport parallel zum Magnetfeld spielt für den Feldtopologiewechsel des Plasmas dabei naturgemäß keine Rolle.

In allgemeineren dreidimensionalen Systemen sind eine Vielzahl von neuen Feldstrukturen vorstellbar. Dabei stellt sich die Frage, welche Rolle der feldlinienparallele Plasmatransport in dreidimensionalen Konfigurationen bei magnetischer Rekonnexion spielen kann. Für sich betrachtet kann paralleler Transport natürlich kein Plasma in Gebiete anderer Feldtopologie überführen. Es ist jedoch denkbar, daß es in allgemeinen dreidimensionalen Feldern möglich sein könnte, die magnetische Topologie durch geeignete lokalisierte Strukturen vorübergehend zu ändern und diese neue Topologie zum parallelen Plasmatransport zu nutzen.

Wäre eine solche Art Rekonnexion möglich, so würde sie sich anbieten zur Erklärung einer Vielzahl von Phänomenen, die sich derzeit mit Neutrallinienrekonnexion nicht oder nur schwer erklären lassen.

Seit *Taylor's* [1986] Arbeit zur Relaxation eines reversed field pinches unter Fixierung der magnetischen Helizität taucht die Frage auf, ob in einem dreidimensionalen Konzept von magnetischer Rekonnexion die Helizität einen Platz habe. Ein allgemeiner Zusammenhang zwischen Helizität und Rekonnexion läßt sich prinzipiell nur in echt dreidimensionalen Modellen diskutieren.

Neben *Vasyliunas'* Definition von Rekonnexion oder Merging existieren in der Literatur mehrere Ideen, wie Rekonnexion möglicherweise allgemeiner zu formulieren sei. Die bedeutensten hiervon sind die Definitionen von *Axford* [1984] und *Sonnerup* [1984]. *Axfords* Definition magnetischer Rekonnexion lautet

Magnetische Rekonnexion ist ein Prozeß, der den Zusammenbruch der Eingefrorenheit des Plasmas in das Magnetfeld durch eine lokalisierten Nichtidealität erzeugt.

Im Gegensatz zu *Axford* orientiert sich *Sonnerup* wie *Vasyliunas* stark an der Struktur des Magnetfeldes. Seine Definition von magnetischer Rekonnexion lautet

Magnetische Rekonnexion findet immer dann in einem Plasma statt, wenn eine elektrische Feldkomponente parallel zu einem magnetischen Separator existiert.

Mit "magnetischer Separator" ist hier eine X-Linie gemeint, die aber eine Feldlinie sein darf, d.h., nicht notwendigerweise eine magnetische Neutrallinie sein muß.

Der Vergleich dieser Definitionen wirft die Frage auf, wie sie sich zueinander und zu *Vasyliunas'* Definition verhalten und ob es Gesichtspunkte gibt, die eine Bevorzugung einer der Definitionen nahelegen. Die Beantwortung dieser Frage erfordert die Erstellung eines formalen Gerüsts, in dem sich die verwendeten topologischen Begriffe näher klären lassen. Weiterhin ist es erforderlich, zwischen globaler und lokaler Topologie zu unterscheiden. Das von *Vasyliunas* verwendete Konzept basiert auf Separatrizen und Separatoren, die weitgehend durch die globale Struktur des Magnetfeldes bestimmt werden. Hier taucht das Problem der praktischen Messung auf, die im allgemeinen zwangsläufig Gebrauch von lokalen Eigenschaften eines Systems machen muß. Legt man Wert auf der Möglichkeit, durch Messung entscheiden zu können, ob ein Prozeß magnetische Rekonnexion involviert, so muß untersucht werden, in wie weit sich Separatoren und Separatrizen durch lokale Betrachtungsweisen erkennen lassen.

Magnetische Neutrallinien scheinen besonders bedeutsame Rekonnexionsstrukturen zu sein. Ein offensichtliches Problem besteht jedoch darin, daß eine Neutrallinie durch ein beliebig kleines magnetisches

Störfeld mit nichtverschwindender Komponente entlang der Neutrallinie zerstört wird. Die resultierenden Konsequenzen für die topologische Struktur eines dreidimensionalen Magnetfeldes, dessen Neutrallinien durch ein solches Störfeld verschwinden, sind unklar. Hier stellt sich die Frage, wie im Übergang zu nichtverschwindenden Magnetfeldern magnetische Rekonnexion zu verstehen ist und weiter, ob magnetische Rekonnexion in Feldern, die nirgendwo verschwinden und keine Separatrizen besitzen, überhaupt möglich ist.

Wir werden diese Frage positiv beantworten. Da hier ein neues, allgemeineres Konzept magnetischer Rekonnexion entwickelt werden muß, sind die damit verbundenen physikalischen Eigenschaften von besonderem Interesse. So stellt sich insbesondere die Frage, welche Rolle das elektrische Feld bei allgemeinen Rekonnexionsprozessen spielt.

Das allgemeine Konzept soll auf komplexe Rekonnexionsstrukturen, wie sie tatsächlich beobachtet werden, angewendet werden. Beispiele von besonderer Bedeutung sind die schon erwähnten Plasmoide in der Magnetosphäre und Flux-Transfer-Events an der Magnetopause. Es wird sich zeigen, daß das neue Rekonnexionskonzept eine befriedigende Antwort auf die Frage gibt, wie Rekonnexion in diesen Strukturen zu erfolgen hat. Dabei stoßen wir auf einen interessanten Zusammenhang zwischen magnetischer Rekonnexion und magnetischer Helizität. Wir werden finden, daß magnetische Rekonnexion in fast idealen Systemen mit nichtverschwindendem Magnetfeld innerhalb des nichtidealen Bereichs in wichtigen Fällen gleichbedeutend ist mit einer Änderung der magnetischen Helizität ist.

Zur Behandlung dieser Problemstellung wird in der vorliegenden Arbeit versucht, einen systematischen Weg einzuschlagen. Im zweiten Kapitel wird daher die Euler-Potentialbeschreibung des Magnetfeldes und des elektrischen Feldes vorgestellt. Um die Anwendbarkeit von Euler-Potentialen in den relevanten Fällen zu zeigen, enthält Kapitel zwei auch einen mathematischen Existenzbeweis.

Die Aufgabe des dritten Kapitels ist, Gleichungen für die zeitliche Änderung der Euler-Potentiale eines gegebenen Magnetfeldes herzuleiten. Die zeitliche Änderung ist hier hervorgerufen durch Plasmabewegung und Zeitableitung des Magnetfeldes.

Ähnlich wie in der Dynamo-Theorie [Moffat, 1978], wo wesentliche Existenzsätze wie das Cowling-

Theorem [Cowling, 1934] mit kinematischen Methoden bewiesen wurden, soll in dieser Arbeit ebenfalls ein kinematischer Weg eingeschlagen werden, um ein neues Konzept magnetischer Rekonnexion zu finden. Eine kinematische Theorie nimmt an, daß das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ des Plasmas als bekannt angenommen wird und sein Einfluß auf die Zeitentwicklung des Magnetfeldes untersucht wird [Moffat, 1978].

Die drei schon erwähnten Definitionen magnetischer Rekonnexion sind ebenfalls von der Struktur her kinematisch. Diese Definitionen sind deshalb sinnvoll, weil sie Eigenschaften vorhersagen, die auch in jedem dynamischen Modell enthalten sein müssen. Auch in der vorliegenden Arbeit wird die kinematische Theorie zur Beschreibung magnetischer Rekonnexion Eigenschaften vorhersagen, die auch in jeder dynamischen Beschreibung Gültigkeit haben müssen. So ist die kinematische Theorie zu verstehen als Rahmen für spätere dynamische Theorien, die Details der Zeitentwicklung klären können. Da ein solcher Rahmen bisher für magnetische Rekonnexion in hinreichender Allgemeinheit nicht existiert, ist die Entwicklung eines solchen Gerüsts erforderlich.

Mit Hilfe der im dritten Kapitel gewonnenen Erkenntnisse kann Magnetische Linien- und Flußerhaltung im vierten Kapitel als Vorarbeit zur Diskussion von Rekonnexion untersucht werden. Vermittels der Euler-Potentialformulierung lassen sich auf sehr einfache Weise Theoreme über Linien- und Flußerhaltung neu beweisen.

Mathematisch-topologische Aspekte sind das Thema des fünften Kapitels. An dieser Stelle wird, vor der physikalisch orientierten Diskussion, eine abstrakte topologische Definition von allgemeiner magnetischer Rekonnexion gegeben, die es erlaubt, bestehende und neue topologische Eigenschaften magnetischer Rekonnexion in ein gemeinsames Bild zu setzen.

Eine vollständige Untersuchung magnetischer Rekonnexion erfordert eine Neuformulierung des konventionellen Konzepts von X-Linien Rekonnexion oder Merging mit Hilfe der neuen Techniken. Diese Aufgabe, zusammen mit einer Untersuchung der globalen Topologie von Magnetosphären mit Neutralpunkten, wird von Kapitel 6 übernommen.

Kapitel 7 stellt Rekonnexion in nichtsingulären Magnetfeldern vor. Die Vorarbeit der vorhergehenden

Kapitel erlaubt eine Erklärung, wie Rekonnexion in nichtsingulären Feldern funktionieren muß und die Herleitung physikalischer Eigenschaften dieser neuen Art magnetischer Rekonnexion.

Die beiden folgenden Kapitel dienen der Anwendung des neugewonnenen Rekonnexionsmodells auf Plasmoid- und Flux-Transfer-Events. Zu diesem Zweck werden zwei einfache kinematische Modelle für die beiden Objekte entwickelt. Explizite kinematische Modelle sind nach dem eingangs Gesagten derzeit der einzige Weg, globale topologische Verbindungen und Rekonnexion in derartigen Strukturen ausreichend aufzulösen. Es wird sich zeigen, daß die für diese Arbeit relevanten Eigenschaften der untersuchten Modelle generisch auch für zukünftige dynamische Untersuchungen sein können. Neben diesen Eigenschaften ermöglicht es vor allem das FTE-Modell, einen neuen Dissipationsmechanismus vorzustellen, der auf Durchmischung von Feldlinientopologie beruht.

Das resultierende vereinheitlichte Bild zusammen mit einer physikalisch orientierten Definition von magnetischer Rekonnexion ist dargestellt in Kapitel 10. An dieser Stelle wird auch eine relativistische Verallgemeinerung von magnetischer Rekonnexion gezeigt.

Zum Abschluß wird der Inhalt dieser Arbeit zusammengefaßt und kritisch, insbesondere im Hinblick auf zukünftige Verbesserungen, diskutiert.

2. Euler-Potentiale

2.1. Einführung

In diesem Kapitel soll die im weiteren wesentliche Euler-Potentialdarstellung des Magnetfeldes $\mathbf{B}$ eingeführt werden und außerdem die Existenz dieser Darstellung für die in dieser Arbeit relevanten Fälle gezeigt werden.

Euler-Potentiale sind zwei Funktionen $\alpha(x, y, z), \beta(x, y, z) : R^3 \rightarrow R$, die

$$\mathbf{B} = \nabla\alpha \times \nabla\beta \quad (2.1)$$

erfüllen. Offenbar genügt $\mathbf{B}$ dann sofort $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Eine direkte Konsequenz von (2.1) ist

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\alpha = \mathbf{B} \cdot \nabla\beta = 0 \quad (2.2)$$

d.h., α und β sind konstant auf Magnetfeldlinien. Eine Feldlinie, d.h., eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (2.3)$$

ist gegeben durch die Schnittlinie der $\alpha(\mathbf{r}) = \alpha_1, \beta(\mathbf{r}) = \beta_1$ Flächen im R^3 für geeignet gewählte α_1 und β_1 .

Sind zwei unabhängige Lösungen q und p von (2.2) gegeben, so lassen sich daraus Euler-Potentiale gewinnen [Stern, 1970]. Da sowohl ∇q als auch ∇p senkrecht zu $\mathbf{B}$ sind, ist ihr Kreuzprodukt parallel zu $\mathbf{B}$ und damit

$$\mathbf{B} = f(\mathbf{r})\nabla q \times \nabla p \quad (2.4)$$

wobei $f(\mathbf{r})$ zunächst beliebig ist. Die Funktion f wird bestimmt durch die Forderung $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$:

$$\nabla f \cdot \nabla q \times \nabla p = 0. \quad (2.5)$$

Damit folgt

$$f = f(q, p) \quad (2.6)$$

Indem wir nun definieren

$$\alpha := \int^q f(q', p) dq' \tag{2.7a}$$

$$\beta := p \tag{2.7b}$$

haben wir eine Euler-Potentialdarstellung gefunden.

Euler-Potentiale wurden zuerst zur Beschreibung des Strömungsfeldes inkompressibler Fluide von *Euler* [1769] eingeführt. Bedeutung in der Elektrodynamik und in der Plasmaphysik erlangten Euler-Potentiale in zunehmendem Maße seit den Arbeiten von *Sweet* [1950], *Dungey* [1958] und im besonderen *Stern* [1970].

2.2. Existenz der Euler-Potentiale

2.2.1. Existenz für singularitätenfreie Magnetfelder

Euler-Potentiale sind Konstanten der Bewegung der Differentialgleichung (2.3). Wegen der im allgemeinen vorliegenden Nichtlinearität derselben ist es à priori nicht klar, ob solche Konstanten der Bewegung tatsächlich existieren. In diesem Abschnitt wollen wir die Existenzfrage untersuchen und für die für uns relevanten Fälle die Existenz von Euler-Potentialen beweisen.

Sei dazu $\mathbf{B}$ im weiteren eine glatte, hinreichend oft differenzierbare Abbildung von R^3 nach R^3 mit Definitionsbereich $\Omega \subset R^3$, den wir als abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, voraussetzen wollen. Eine weitere Voraussetzung ist nahegelegt durch die im weiteren betrachteten Anwendungen und ermöglicht den Existenzbeweis in der folgenden Form: Es gebe eine Fläche $F \subset \Omega$, die von allen Feldlinien genau einmal geschnitten wird. Diese Fläche darf auch ein Teil des Randes von Ω sein. Diese Forderung schließt Wiederkehr aus, welches typischerweise zu chaotischem Verhalten und damit zur Nichtexistenz von Euler-Potentialen führt.

Der für die neue Theorie wesentliche Fall ist der Fall $|\mathbf{B}| \neq 0$. Für diesen Fall beweisen wir die globale Existenz von Euler-Potentialen.

Satz 1 Unter den obigen Voraussetzungen existieren stets Euler-Potentiale in ganz Ω .

Beweis: Der Beweis benutzt mehrmals die Methode der Charakteristiken. Für die Lösbarkeit der charakteristischen Gleichungen gibt es bereits Existenzaussagen, die wir benutzen können.

Für das kartesische Problem

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = B_x \frac{\partial \alpha}{\partial x} + B_y \frac{\partial \alpha}{\partial y} + B_z \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

sind die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathbf{B} \quad (2.9)$$

im allgemeinen nicht in günstiger Form, da die einzelnen Komponenten von $\mathbf{B}$ durchaus verschwinden können. Daher führen wir neue stetige und stetig invertierbare Koordinaten u, v, w in Ω ein. In diesen

Koordinaten wird (2.8):

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} \mathbf{B} \cdot \nabla u + \frac{\partial \alpha}{\partial v} \mathbf{B} \cdot \nabla v + \frac{\partial \alpha}{\partial w} \mathbf{B} \cdot \nabla w = 0 \quad (2.10)$$

Ziel ist es zunächst, eine Koordinate u zu finden, die erfüllt

$$\mathbf{B} \cdot \nabla u \neq 0 \quad (2.11)$$

in Ω . Eine solche Koordinate gibt es unter den Voraussetzungen des Satzes immer:

Hilfssatz 1 Unter obigen Voraussetzungen existiert für beliebiges differenzierbares $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Lösung von

$$\mathbf{B} \cdot \nabla u = f \quad (2.12)$$

Beweis zu Hilfssatz 1: Durch Division erhält man das Problem

$$\frac{1}{f} \mathbf{B} \cdot \nabla u = 1 \quad (2.13)$$

Diese Differentialgleichung hat die charakteristischen Gleichungen [z.B. *Courant und Hilbert*, 1962]

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{f} B_x; \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{1}{f} B_y; \quad \frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{f} B_z; \quad \frac{du}{d\tau} = 1 \quad (2.14)$$

Die letzte dieser Gleichungen erlaubt zu setzen

$$u := \tau \quad (2.15)$$

und damit erhalten wir aus (2.14)

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{f} B_x; \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{f} B_y; \quad \frac{dz}{du} = \frac{1}{f} B_z; \quad (2.16)$$

Anfangsbedingungen für dieses Problem lassen sich nur auf einer Fläche, die nicht parallel zu $\mathbf{B}$ ist (und damit schon Äquipotentialfläche eines Euler-Potentials wäre), vorgeben [z.B. *Courant und Hilbert*, 1962].

Sei diese Fläche glatt und parametrisiert durch Koordinaten η, ξ . Dann lassen sich die Anfangsbedingungen schreiben als

$$u(\mathbf{r}_0(\eta, \xi)) = u_0(\eta, \xi) \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{r}(u_0(\eta, \xi)) = \mathbf{r}_0(\eta, \xi) \quad (2.17b)$$

Dann besitzt das charakteristische Problem eindeutige Lösungen

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u; \mathbf{r}_0(\eta, \xi)) = \mathbf{r}(u; \eta, \xi) \quad (2.18)$$

die sich bis zum Rand von Ω fortsetzen lassen [Birkhoff und Rota, 1969, Arnold, 1980]. Aus den drei Gleichungen (2.18) läßt sich nun η und ξ eliminieren. Der Beweis dieser Behauptung folgt aus Hilfssatz 2 unten. Nach der Elimination von η und ξ erhält man eine implizite Gleichung für u , die u bestimmt.

Die Aussage von Hilfssatz 1 erlaubt es, in (2.12) $f \equiv 1$ zu setzen und damit u zu wählen als Lösung von

$$\mathbf{B} \cdot \nabla u = 1 \quad (2.19)$$

Damit wird Gleichung (2.10)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \mathbf{B} \cdot \nabla v \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \mathbf{B} \cdot \nabla w \frac{\partial \alpha}{\partial w} = 0 \quad (2.20)$$

Hierbei sind $\mathbf{B} \cdot \nabla v$ und $\mathbf{B} \cdot \nabla w$ als Funktionen von u, v und w aufzufassen. Die stetige Invertierbarkeit der Koordinatentransformation garantiert dann, daß das Bild $\tilde{\Omega}$ von Ω unter der Koordinatentransformation wieder kompakt ist. Damit können wir die Charakteristikenmethode wieder auf (2.20) anwenden. Die charakteristischen Gleichungen sind:

$$\frac{dv}{du} = \mathbf{B} \cdot \nabla v \quad (2.21)$$

$$\frac{dw}{du} = \mathbf{B} \cdot \nabla w \quad (2.22)$$

Analog zu den Lösungseigenschaften von (2.17) besitzt auch dieses Problem Lösungen

$$v = v(u; v_0, w_0) \quad (2.23a)$$

$$w = w(u; v_0, w_0) \quad (2.23b)$$

wobei

$$v_0 = v(u_0; v_0, w_0) \quad (2.24a)$$

$$w_0 = w(u_0; v_0, w_0) \quad (2.24b)$$

die Anfangsbedingungen sind.

Die Anfangsbedingungen, gesehen als Funktionen von u und v , sind konstant auf Feldlinien, also Funktionen von Euler-Potentialen. Es bleibt nur zu zeigen, daß sich Gleichungen (2.23a) und (2.23b) nach v_0 bzw. u_0 auflösen lassen.

Hilfssatz 2 Seien

$$v = f(u; v_0, w_0) \quad (2.25a)$$

$$w = g(u; v_0, w_0) \quad (2.25b)$$

Lösungen von

$$\frac{dv}{du} = K_v(u, v, w) \quad (2.26a)$$

$$\frac{dw}{du} = K_w(u, v, w) \quad (2.26b)$$

mit Anfangsbedingungen $v_0 = f(u_0; v_0, w_0)$ und $w_0 = g(u_0; v_0, w_0)$, und K_v, K_w seien stetig partiell differenzierbar auf einer kompakten Menge Θ . Dann lassen sich in Θ Gleichungen (2.25a) und (2.25b) eindeutig nach v_0 und w_0 auflösen.

Beweis zu Hilfssatz 2: Formal läßt sich die Lösung von (2.26) schreiben als

$$v(u; v_0, w_0) = \int_{u_0}^u K_v(u', v(u'), w(u')) du' + v(u_0) = \int_{u_0}^u K_v du' + v_0$$

und

$$w(u; v_0, w_0) = \int_{u_0}^u K_w(u', v(u'), w(u')) du' + w(u_0) = \int_{u_0}^u K_w du' + w_0$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen [z.B. *Birkhoff und Rota*, 1962], sind diese Gleichungen auflösbar nach v_0 bzw. w_0 genau dann, wenn

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(v_0, w_0)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial v_0} & \frac{\partial f}{\partial w_0} \\ \frac{\partial g}{\partial v_0} & \frac{\partial g}{\partial w_0} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, d.h., die Determinante nicht verschwindet. Nach allgemeinen Ergebnissen der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen [*Birkhoff und Rota*, 1962] sind f und g stetig differenzierbare

Funktionen von v_0 und w_0 . Offenbar gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial v_0} = 1 + \int_{u_0}^u du \left(\frac{\partial K_v}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v_0} + \frac{\partial K_v}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial v_0} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial w_0} = 1 + \int_{u_0}^u du \left(\frac{\partial K_w}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial w_0} + \frac{\partial K_w}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial w_0} \right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial w_0} = \int_{u_0}^u du \left(\frac{\partial K_v}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial w_0} + \frac{\partial K_v}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial w_0} \right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial v_0} = \int_{u_0}^u du \left(\frac{\partial K_w}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial v_0} + \frac{\partial K_w}{\partial w} \frac{\partial g}{\partial v_0} \right)$$

Alle Integrale existieren nach Voraussetzung über K_v und K_w . Für u nahe u_0 ist daher

$$\det \frac{\partial(f, g)}{\partial(v_0, w_0)} = 1 + O(|u - u_0|)$$

d.h. für u hinreichend nah bei u_0 ist das Problem gelöst. Daher gibt es für jedes $(u, v, w) \in \Theta$ mit $u = u_0$ eine offene Umgebung $N_0 \subset \Theta$, worin die Lösung eindeutig ist. Die Umgebungen um die u_0 bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge Θ . Daher existiert eine endliche Teilüberdeckung. Da die Lösung global existiert und sich auf jeder dieser Teilmengen auflösen läßt, läßt sie sich damit auch global auflösen. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Nach Auflösung

$$v_0 = v_0(u, v, w) \quad (2.27a)$$

$$w_0 = w_0(u, v, w) \quad (2.27b)$$

ergeben sich nach Koordinatenrücktransformation die Konstanten der Bewegung. Diese lassen sich, wie in der Einführung (2.7) gezeigt, zu Euler-Potentialen transformieren.

Es ist klar, daß die Existenz von Euler-Potentialen wesentlich davon abhängt, daß das Magnetfeld keine Singularitäten besitzt und außerdem, daß das Gebiet Ω kompakt, also beschränkt und einfach zusammenhängend ist. Auf unbeschränkten Gebieten und mehrfach zusammenhängenden (z.B. toroidalen) Gebieten gelten solche Existenzaussagen nicht. Dieses ist jedoch für die wesentlichen Anwendungen in

dieser Arbeit unproblematisch, da die Darstellung in erster Linie für Fälle benötigt wird, wo das Magnetfeld keine Singularitäten besitzt und für toroidale Geometrien, die sich in topologische Zylinder zerteilen lassen.

In Konfigurationen, wo Magnetfeldsingularitäten relevant für magnetische Rekonnexion sind, genügt zur Diskussion der magnetischen Rekonnexion eine Betrachtung der Feldstruktur in einer Umgebung der Feldsingularität. Daher soll der Vollständigkeit halber noch auf Euler-Potentiale in der Nähe von Magnetfeldsingularitäten eingegangen werden.

2.2.2. Euler-Potentiale für Magnetfelder mit Singularitäten

Aus der klassischen Theorie der magnetischen Rekonnexion für Magnetfelder mit X-Punkten (Neutralpunkten mit lokal hyperbolischer Feldstruktur) ist bekannt, daß es für nicht singularitätenfreie Magnetfelder glatte Euler-Potentiale geben kann. Im einfachsten Fall nahe am X-Punkt (der bei $x = y = 0$ liege) sind dies

$$\alpha = \frac{1}{2}(y^2 - kx^2) \quad k > 0 \quad (2.28)$$

$$\beta = z \quad (2.29)$$

Dieses deutet darauf hin, daß selbst bei singulären Magnetfeldern durchaus Euler-Potentiale existieren können. Wir wollen hier zunächst im Rahmen einer Entwicklung des Magnetfeldes um den singulären Punkt untersuchen, wie man allgemein (nicht notwendigerweise glatte) Euler-Potentiale in der Nachbarschaft einer Singularität finden kann. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit liege die Singularität im Koordinatenursprung. Analog zu *Fukao et al.* [1975] wollen wir den generischen Fall annehmen, daß in der Nähe der Singularität $\mathbf{B}$ eine lineare Form in $\mathbf{r}$ ist, d.h.,

$$\mathbf{B} = \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{B})_0 \quad (2.30)$$

wobei $(\nabla \mathbf{B})_0 = (\nabla \mathbf{B})(\mathbf{r} = 0)$.

In der Arbeit von *Fukao* wurden die Abhängigkeit der Feldlinienstrukturen in der Nähe eines Neutralpunktes von den Eigenwerten von $(\nabla \mathbf{B})_0$ untersucht. Wir wollen statt dessen mit Hilfe bekannter mathematischer Resultate zeigen, daß sich stets lokal zwei verallgemeinerte Konstanten der Bewegung für

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{r} \cdot (\nabla \mathbf{B}_0) \quad (2.31)$$

finden lassen, wobei 'verallgemeinert' bedeutet, daß diese nicht notwendig stetig sein müssen. Über die Lösbarkeit und Lösungseigenschaften von (2.31) existiert mathematische Literatur [z.B. *Kamke*, 1972].

Wir wollen hier der Einfachheit halber nur den Fall nichtentarteter und nichtverschwindender Eigenwerte diskutieren, da der allgemeinere Fall vollkommen analog zu handhaben ist. Aus $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ folgt

für die Spur des Tensors $\nabla \mathbf{B}_0$

$$Tr(\nabla \mathbf{B})_0 = 0 \quad (2.32)$$

und damit auch

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 0 \quad (2.33)$$

wo λ_i die Eigenwerte von $(\nabla \mathbf{B})_0$ sind. Über dem Körper der komplexen Zahlen C läßt sich $(\nabla \mathbf{B})_0$ durch eine lineare Transformation trigonalisieren [z.B. *Herstein*, 1975]. In den entsprechenden (u.U. komplexen) Koordinaten u, v, w lautet (2.31) dann

$$\frac{du}{d\tau} = a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w \quad (2.34a)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = a_{22}v + a_{23}w \quad (2.34b)$$

$$\frac{dw}{d\tau} = a_{33}w \quad (2.34c)$$

mit

$$\sum_i a_{ii} = 0 \quad (2.34d)$$

Gleichungen (2.34) besitzen die allgemeine Lösung

$$u = u_0 e^{a_{11}\tau} + \frac{a_{12}v_0}{a_{22} - a_{11}} e^{a_{22}\tau} + \left(\frac{a_{12}a_{23}}{a_{33} - a_{22}} + a_{13} \right) \frac{w_0}{a_{33} - a_{22}} e^{a_{33}\tau} \quad (2.35a)$$

$$v = v_0 e^{a_{22}\tau} + \frac{a_{23}w_0}{a_{33} - a_{22}} e^{a_{33}\tau} \quad (2.35b)$$

$$w = w_0 e^{a_{33}\tau} \quad (2.35c)$$

Offensichtlich sind u_0, v_0 und w_0 Konstanten der Bewegung. Um eine Konstante der Bewegung in brauchbarer Form zu erhalten, ist es erforderlich, die τ -Abhängigkeit von (2.35) zu eliminieren. Dies geschieht durch Auflösung nach $e^{a_{ii}\tau}$. Multiplikation der drei resultierenden Gleichungen miteinander eliminiert wegen (2.34d) die τ -Abhängigkeit und ergibt eine Funktion vom Typ

$$\dot{\alpha} = (u - \zeta v - \xi w)(v - \gamma w)w \quad (2.36)$$

welche komplexwertig und konstant auf Feldlinien ist. Dabei stammen die Konstanten ζ , ξ und γ von den Nichtdiagonalelementen in (2.34) ab.

Rücktransformation zu x, y, z Koordinaten ergibt dann eine komplexwertige Funktion $\hat{\alpha}(x, y, z)$, deren Real und Imaginärteil beide konstant auf Feldlinien sind. Sind Real und Imaginärteil keine Funktionen voneinander, so sind zwei Konstanten der Bewegung gefunden, aus denen sich, wie in Abschnitt 1 gezeigt, Euler-Potentiale gewinnen lassen. Falls Real- und Imaginärteil abhängig sind oder $\hat{\alpha}$ reell oder imaginär ist, läßt sich eine zweite Konstante der Bewegung beispielsweise durch Auflösen von (2.35c) nach τ und einsetzen in (2.35b) gewinnen. Damit ist

$$\hat{\beta} = v_0 w_0^{\frac{z_{22}}{z_{33}}} \quad (2.37)$$

wiederum wie $\hat{\alpha}$ konstant auf Feldlinien. Als Beispiel wollen wir als Singularität den symmetrischen Sattelpunkt diskutieren. In diesem Fall ist $\mathbf{B}$ in der Nachbarschaft der Singularität

$$\mathbf{B}_x = x \quad (2.38a)$$

$$\mathbf{B}_y = y \quad (2.38b)$$

$$\mathbf{B}_z = -2z \quad (2.38c)$$

Bild 2.1 zeigt Feldlinien eines magnetischen Sattelpunktes.

Die oben beschriebene Prozedur ergibt dann

$$\hat{\alpha} = xyz \quad (2.39a)$$

$$\hat{\beta} = \frac{x}{y} \quad (2.39b)$$

als Konstanten der Bewegung, wobei $\hat{\beta}$ offensichtlich nicht stetig ist. Die zugehörigen Euler-Potentiale, konstruiert nach dem in Abschnitt 2.1 beschriebenem Verfahren, sind

$$\alpha' = xyz \quad (2.40a)$$

$$\beta' = \ln x/y \quad (2.40b)$$



Bild 2.1 Acht typische Feldlinien des symmetrischen magnetischen Sattelpunktes (2.38)

Mit Hilfe einer kanonischen Transformation

$$\alpha = 2\alpha' \cosh(\beta') \quad (2.41a)$$

$$\beta = \arctan e^{\beta'} \quad (2.41b)$$

(siehe Abschnitt 2.3) wird daraus

$$\alpha = z(x^2 + y^2) \quad (2.42a)$$

$$\beta = \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad (2.42b)$$

Offensichtlich ist β jetzt nicht singulär (φ ist der Polarwinkel) aber auch nicht stetig. Dieses entspricht einem ähnlichen Ergebnis von *Arnold* [1980] für ein planares System.

In diesem Sinne existiert auch keine stetige globale Fortsetzung der Euler-Potentiale singulärer Felder. Da jedoch in den für unsere Anwendungen wesentlichen Fällen das Magnetfeld entweder singularitätenfrei ist oder es genügt, lokale Darstellungen zu betrachten, können wir zur weiteren Diskussion

Euler-Potentiale verwenden. In anderen Fällen muß an den singulären Stellen gegebenenfalls ein geeigneter Grenzwertprozess durchgeführt werden, beziehungsweise die Singularitäten müssen ausgeklammert werden.

2.3. Die Eichung der Euler-Potentiale

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Euler-Potentialdarstellung des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ und des elektrischen Potentials ϕ zu finden und die Klasse erlaubter Eichtransformationen herzuleiten. Eichtransformationen der Euler-Potentiale für bestimmte Zwecke sind in der Literatur schon betrachtet worden [Northrop, 1963; Stern, 1970; Vasyliunas, 1972]. In dieser Arbeit soll die allgemeinst mögliche Eichtransformation hergeleitet werden ohne zusätzliche Annahmen an Magnetfeld und elektrisches Feld.

Die Gleichung für $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \alpha \times \nabla \beta \quad (2.42)$$

hat als allgemeine Lösung

$$\mathbf{A} = \alpha \nabla \beta + \nabla f \quad (2.43)$$

wobei f eine beliebige differentierbare Funktion des Ortes ist. Das elektrische Feld läßt sich ausdrücken durch $\mathbf{A}$ und ϕ als

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (2.44)$$

Dies wird mit (2.43)

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \beta - \alpha \nabla \frac{\partial \beta}{\partial t} - \nabla \left(\phi + \frac{\partial f}{\partial t} \right) \quad (2.45a)$$

$$= -\frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \beta + \frac{\partial \beta}{\partial t} \nabla \alpha - \nabla \psi \quad (2.45b)$$

wobei

$$\psi = \phi + \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (2.46)$$

gesetzt wurde. Offensichtlich ist das Magnetfeld und das elektrische Feld in der Euler-Potentialdarstellung hier bestimmt durch α, β und ψ . Diese Darstellung ist nichteindeutig im Sinne möglicher Eichtransformationen.

Satz 2: Jede Eichtransformation von $\alpha, \beta, \psi \rightarrow \alpha', \beta', \psi'$ ist gegeben durch eine kanonische Transformation. Wenn α und β' als unabhängige Variable gewählt werden können, so ist die Transformation

charakterisiert durch eine zweimal stetig differenzierbare 'Erzeugende Funktion' $G(\alpha, \beta', t)$, die folgende Abbildung induziert:

$$\alpha' = \frac{\partial G}{\partial \beta'} \quad (2.47a)$$

$$\beta = \frac{\partial G}{\partial \alpha} \quad (2.47b)$$

$$\psi' = \psi - \frac{\partial G}{\partial t} \quad (2.47c)$$

(Die kanonischen Transformationen für andere unabhängige Variablen lassen sich aus dieser wie in der klassischen Mechanik durch Legendre-Transformation gewinnen.)

Beweis: Zuerst zeigen wir, daß die Transformation (2.47) das Magnetfeld erhält, d.h.,

$$\mathbf{B} = \nabla \alpha' \times \nabla \beta' \stackrel{!}{=} \nabla \alpha \times \nabla \beta \quad (2.48)$$

Mit (2.47) folgt

$$\mathbf{B} = \nabla \frac{\partial G}{\partial \beta'} \times \nabla \beta' \stackrel{!}{=} \nabla \alpha \times \nabla \frac{\partial G}{\partial \alpha} \quad (2.49)$$

Auswerten der Gradienten auf G ergibt:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta'} \nabla \alpha \times \nabla \beta' \stackrel{!}{=} \nabla \alpha \times \nabla \beta' \frac{\partial^2 G}{\partial \beta' \partial \alpha} \quad (2.50)$$

Wegen der geforderten Differenzierbarkeitseigenschaften von G ist damit die Gleichheit gezeigt. Die Vollständigkeit der Darstellung ergibt sich nun, wenn man ansetzt

$$\alpha' = \alpha'(\alpha, \beta, t) \quad (2.51)$$

$$\beta' = \beta'(\alpha, \beta, t) \quad (2.52)$$

Dieser Ansatz ist der allgemeinst mögliche, da α' und β' wieder konstant auf Feldlinien und daher Funktionen von α und β sein müssen. Einsetzen in $\mathbf{B} = \nabla \alpha' \times \nabla \beta'$ ergibt dann:

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \nabla \alpha \times \nabla \beta' \frac{\partial \beta'}{\partial \beta} + \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} \nabla \beta \times \nabla \alpha' \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} \quad (2.53a)$$

$$= \left(\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta'}{\partial \beta} - \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} \right) \mathbf{B} \quad (2.53b)$$

Offensichtlich muß gelten:

$$\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta'}{\partial \beta} - \frac{\partial \alpha'}{\partial \beta} \frac{\partial \beta'}{\partial \alpha} \right) = 1 \quad (2.54)$$

Dieses Resultat ist analog zu dem von *Stern* [1970]. Wir können nun, wie in der klassischen Mechanik, statt α und β etwa α und β' als unabhängige Koordinaten wählen. Dann folgt sofort:

$$\frac{\partial \alpha'}{\partial \alpha} = \frac{\partial \beta}{\partial \beta'} \quad (2.55)$$

mit der allgemeinen Lösung (2.47a+b). Andere, durch Legendre Transformation auf $G(\alpha, \beta', t)$ herleitbare Erzeugende erhält man durch andere Wahl der unabhängigen Koordinaten. Der Beweis von (2.47c) erfolgt durch Einsetzen von α', β', ψ' bzw. α, β, ψ in (2.45b). Man erhält:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \alpha}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2} \nabla \alpha + \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta'} \nabla \beta' \right) \\ & + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial t} \right) \nabla \alpha - \nabla \psi \\ & = - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta'} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial \beta'^2} \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \frac{\partial^2 G}{\partial \beta \partial t} \right) \nabla \beta' \\ & + \frac{\partial \beta'}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \beta'} \nabla \alpha + \frac{\partial^2 G}{\partial \beta'^2} \nabla \beta' \right) - \nabla \psi' \end{aligned} \quad (2.56)$$

Diese Gleichung läßt sich zusammenfassen zu

$$\nabla \left(\frac{\partial G}{\partial t} - \psi + \psi' \right) = 0 \quad (2.57)$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

3. Die Dynamik der Euler-Potentiale

Dieser Teil schließt an die Diskussion der Existenz und Eichung der Euler-Potentiale an. Die Untersuchung wird hier durch die Berücksichtigung eines verallgemeinerten Ohm'sches Gesetzes von der Form

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{R} \quad (3.1)$$

erweitert. Dabei steht der Vektor $\mathbf{v}$ für die Plasmageschwindigkeit und der Term $\mathbf{R}$ auf der rechten Seite von Gleichung (3.1) bezeichnet eine allgemeine Nichtidealität; in der resistiven Magnetohydrodynamik [z.B. Krall und Trivelpiece, 1973] und in der Dynamo Theorie [Moffat, 1978] wird $\mathbf{R}$ oft durch die stromabhängige Form

$$\mathbf{R} = \eta \mathbf{j} \quad (3.2)$$

approximiert, wobei die Resistivität η eine Funktion von verschiedenen Plasmaparametern sein kann. In jüngster Vergangenheit wurden Abhängigkeiten von der Stromdichte, der Dichte und dem Ort von Otto [1987] untersucht.

Eine allgemeine Form für $\mathbf{R}$ wurde gegeben von Vasyliunas [1975]

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = \eta \mathbf{j} + \frac{m_e}{ne^2} \left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{j} \mathbf{v} + \mathbf{v} \mathbf{j}) \right] \\ - \frac{1}{ne} \nabla \cdot \underline{\mathbf{P}}^e + \frac{1}{nec} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Hier bezeichnen

e : Elementarladung

m_e : Elektronenmasse

n : Anzahldichte der Elektronen

$\underline{\mathbf{P}}^e$: Elektronendrucktensor.

Gleichung (3.3) setzt voraus daß

$$|\rho_e \mathbf{v}| \ll |\mathbf{j}|$$

(ρ_e : Ladungsdichte) und, daß die Ionenmasse m_i viel größer ist als m_e . In dieser Arbeit ist es jedoch nicht erforderlich, die physikalische "Quelle" für $\mathbf{R}$ zu spezifizieren; wir wollen nur fordern, daß

$\mathbf{R}$ eine hinreichend glatte Vektorfunktion des Ortes darstellt. Hiermit erweitern wir die kinematische Betrachtungsweise dadurch, daß wir annehmen, daß die Vektorfunktion $\mathbf{R}$ im Prinzip bekannt ist.

Der entscheidende Schritt zur Dynamik der Euler-Potentiale ist die Einführung von Euler-Potentialen in das Ohm'sche Gesetz (3.1). Dazu benutzen wir Gleichung (2.45b) für das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die Euler-Potentialdarstellung für $\mathbf{B}$ aus (2.1). Damit erhalten wir:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} \nabla \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \nabla \beta - \nabla \psi + \nabla \alpha (\mathbf{v} \cdot \nabla \beta) - \nabla \beta (\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha) = \mathbf{R} \quad (3.4)$$

Wir führen nun eine dritte Koordinate, die Bogenlänge s ein, mit

$$\mathbf{B} \cdot \nabla s = |\mathbf{B}| \quad (3.5)$$

so daß die Funktionen α , β und s ein Koordinatensystem bilden. Dies ist in allen hier relevanten Fällen möglich, wie in Kapitel 2 bewiesen. Daher können wir folgende Funktionen definieren:

$$R^\alpha := \frac{\mathbf{R} \cdot (\nabla \beta \times \nabla s)}{|\mathbf{B}|} \quad (3.6a)$$

$$R^\beta := \frac{\mathbf{R} \cdot (\nabla s \times \nabla \alpha)}{|\mathbf{B}|} \quad (3.6b)$$

$$R^s := \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \quad (3.6c)$$

Mit diesen Definitionen läßt sich $\mathbf{R}$ schreiben als

$$\mathbf{R} = R^\alpha \nabla \alpha + R^\beta \nabla \beta + R^s \nabla s \quad (3.7)$$

Nachdem dieser Ausdruck in (3.4) eingesetzt wurde, erhält man unter Ausnutzung der linearen Unabhängigkeit von $\nabla \alpha$, $\nabla \beta$ und ∇s

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial \beta} - R^\beta \quad (3.8a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + R^\alpha \quad (3.8b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -R^s \quad (3.8c)$$

Dabei bezeichnet d/dt die totale Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (3.9)$$

Die Terme auf der rechten Seite von Gleichungen (3.8) sind jetzt aufzufassen als Funktionen von α , β , s und t . Zur Vervollständigung von (3.8) setzen wir

$$\frac{ds}{dt} = v_{\parallel}(\alpha, \beta, s, t) - \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) \quad (3.10)$$

wo $v_{\parallel}$ die Plasmageschwindigkeitskomponente parallel zum Magnetfeld und $\mathbf{r}(\alpha, \beta, s, t)$ die zeitabhängige Koordinatentransformation von α , β und s in den Ortsraum darstellt. Gleichungen (3.8a) und (3.8b) zusammen mit (3.10) bestimmen dann $\alpha(t)$, $\beta(t)$ und $s(t)$ für gegebenes $\psi(t)$, $\mathbf{R}(t)$ und $v_{\parallel}(t)$. Gleichung (3.8c) ist eine Konsistenzbedingung. Im Allgemeinen werden wir jedoch keinen Bezug nehmen auf Gleichung (3.10), da für unsere Diskussion keine tatsächliche Integration von (3.8) und (3.10) erforderlich ist.

In einem Gebiet, wo $\mathbf{R}$ gegenüber den anderen Termen in (3.1) vernachlässigbar ist, gilt das ideale Ohm'sche Gesetz

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (3.11)$$

In vielen astrophysikalischen Plasmen, so zum Beispiel in der Erdmagnetosphäre, ist (3.11) anwendbar außerhalb eines relativ kleinen Bereiches, wo $\mathbf{R} \neq 0$ ist [z.B. *Vasyliunas*, 1975; *Axford*, 1984]. In diesen idealen Bereichen wird (3.8)

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial \beta} \quad (3.12a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad (3.12b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (3.12c)$$

Aus (3.12c) folgt sofort

$$\psi = \psi(\alpha, \beta, t) \quad (3.13)$$

Offensichtlich ist im Falle idealer Plasmabewegung $\psi(\alpha, \beta, t)$ eine Hamiltonfunktion für die Dynamik der Euler-Potentiale. Dabei ist β eine kanonische Orts- und α eine kanonische Impulsvariable. Die Möglichkeit, für ideale Plasmabewegung $\psi = \psi(\alpha, \beta)$ wählen zu können, wurde bereits von *Stern* [1970] und *Vasyliunas* [1972] erwähnt.

An dieser Stelle soll noch bemerkt werden, daß die grundlegende physikalische Größe die Plasmabewegung darstellt, so daß Gleichungen (3.8) und (3.12) die zeitliche Änderung der α , β und s Werte auf der Bahn eines Plasmaelementes beschreiben. Wir wollen diese zeitliche Änderung im weiteren kurz mit "Dynamik der Euler-Potentiale" bezeichnen, wobei aber stets die zeitliche Entwicklung der Euler-Potentialwerte und der Weglängenkoordinate s , wie von Plasmaelementen gesehen, gemeint ist.

Gleichungen (3.8) bzw. (3.12) spezifizieren stets nur die totale Zeitableitung (3.9) der Euler-Potentiale. Die Unterscheidung zwischen den partiellen Zeitableitungen und den konvektiven Termen ist nicht eichinvariant. Dies folgt aus der Tatsache, daß sich für $\mathbf{B} \neq 0$ stets eine Eichung finden läßt, die lokal etwa $\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha$ zu Null werden läßt.

Die mit der Eichfreiheit der Wahl der Eulerpotentiale verbundene Nichteindeutigkeit einer Definition der Bewegung von Feldlinien wurde von *Vasyliunas* [1972] untersucht. *Vasyliunas'* Ergebnis spiegelt sich hier wieder in der Wahl von Eichtransformationen (2.47), deren Erzeugende eine explizite Funktion der Zeit ist.

Für magnetische Rekonnexion allerdings ist es von wesentlicher Bedeutung, wie Plasmaelemente gegebenenfalls ihre magnetische Verbindung ändern. Dabei ist es unerheblich, in welcher Weise den Feldlinien die α bzw. β -Werte zugeordnet werden. Statt dessen ist die für das Konzept von einer allgemeinen magnetischen Rekonnexion wesentliche Frage, ob Plasmaelemente, welche zu einer Referenzzeit durch eine magnetische Feldlinie verbunden war, weiterhin zu späteren Zeiten durch Feldlinien verbunden bleiben oder nicht. Es ist klar, daß die Antwort auf diese Frage eichunabhängig ist. Daher ist es legitim, die Änderung der magnetischen Verbindung in einer bestimmten Eichung zu untersuchen.

Die magnetische Verbindung (magnetische Linienhaltung) und magnetische Flußerhaltung sollen im folgenden Kapitel als Vorarbeit zur Diskussion allgemeiner magnetischer Rekonnexion im Rahmen der Dynamik der Eulerpotentiale untersucht werden.

4. Magnetische Linien- und Flußerhaltung

In diesem Kapitel soll untersucht werden, welche Form ein nichtidealer Term $\mathbf{R}$ im Ohm'schen Gesetz (3.1) haben darf, damit die Plasmabewegung linien- bzw. flußerhaltend ist. Dazu wollen wir eine Definition von magnetischer Linien- und magnetischer Flußerhaltung diesem Kapitel voranstellen.

Definition: Eine Zeitentwicklung eines Plasma-Magnetfeld Systems in einem vorgegebenen (eventuell zeitabhängigen) Volumen heißt *linienerhaltend*, wenn zwei beliebige Plasmaelemente, die zu einer vorgegebenen Referenzzeit durch eine magnetische Feldlinie verbunden waren, auch für alle späteren Zeiten durch eine Magnetfeldlinie verbunden sind.

Eine Zeitentwicklung eines Plasma-Magnetfeld Systems in einem vorgegebenen (eventuell zeitabhängigen) Volumen heißt *flußerhaltend*, wenn der magnetische Fluß durch eine beliebige, mit der Plasmaströmung mittransportierte Fläche konstant ist.

Magnetische Linien- und Flußerhaltung ist in der Literatur vielfach diskutiert worden [z.B. *Newcomb*, 1958; *Vasyliunas*, 1972; *Parker*, 1979]. Es bietet sich aber an, Linien- und Flußerhaltung neu abzufassen, da die zugehörigen Beweise in der in dieser Arbeit entwickelten Formulierung besonders einfach werden. Außerdem ist eine Untersuchung dieser Eigenschaften erforderlich zur Vorbereitung der Diskussion magnetischer Rekonnexion in den folgenden Kapiteln. Wir beginnen mit der magnetischen Linienerhaltung, da Linienerhaltung das allgemeinere Konzept ist.

Im Euler-Potentialbild ist eine Strömung offensichtlich linienerhaltend, wenn zwei Plasmaelemente, die zur Zeit t_0 auf derselben Feldlinie liegen, d.h., insbesondere auf gleichen α und β - Flächen liegen, wieder zu jeder Zeit $t > t_0$ gemeinsame α und β - Werte haben, und zwar unabhängig von der Koordinate s . Ausgehend von den Gleichungen (3.8) erfordert das eben gesagte, daß die rechte Seite unabhängig von s ist, also

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + R^\alpha \right) = 0 \quad (4.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta} + R^\beta \right) = 0 \quad (4.1b)$$

Wir leiten nun die allgemeine Lösung für $\mathbf{R}$ her. Jede Lösung von (4.1) muß erfüllen

$$\frac{\partial^2 R^\beta}{\partial s \partial \alpha} = \frac{\partial^2 R^\alpha}{\partial s \partial \beta} \quad (4.2)$$

Zusammen mit Gleichung (3.8c) folgt für die s -Ableitungen von R^α und R^β sowie R^s :

$$\frac{\partial R^\beta}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial R^\alpha}{\partial s} = \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \quad (4.3b)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = -\rho = -R^s \quad (4.3c)$$

wobei $\rho = \rho(\alpha, \beta, s, t)$ eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktion ist. Um $\mathbf{R}$ endgültig zu bestimmen, sei

$$\hat{P}(\alpha, \beta, s, t) := \int ds \, \rho(\alpha, \beta, s, t) \quad (4.4)$$

Damit folgt nun aus Gleichungen (4.3)

$$R^\alpha = \frac{\partial \hat{P}}{\partial \alpha} + R_0^\alpha(\alpha, \beta, t) \quad (4.5a)$$

$$R^\beta = \frac{\partial \hat{P}}{\partial \beta} + R_0^\beta(\alpha, \beta, t) \quad (4.5b)$$

$$R^s = \frac{\partial \hat{P}}{\partial s} \quad (4.5c)$$

Damit sind R_0^α und R_0^β frei wählbare Funktionen, von denen nur Differenzierbarkeit gefordert wird. Es ist nun bekannt, daß man ein "Vektorfeld" (R_0^α, R_0^β) im α - β -Raum als Gradient und Rotation schreiben kann, d.h., es existieren zwei Funktionen $P_0(\alpha, \beta, t)$, so daß

$$R_0^\alpha = \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q}{\partial \beta} \quad (4.6a)$$

$$R_0^\beta = \frac{\partial P_0}{\partial \beta} - \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \quad (4.6b)$$

Mit der Definition $P := \hat{P} + P_0$ lautet das endgültige Resultat:

$$R^\alpha = \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q}{\partial \beta} \quad (4.7a)$$

$$R^\beta = \frac{\partial P}{\partial \beta} - \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \quad (4.7b)$$

$$R^s = \frac{\partial P}{\partial s} \quad (4.7c)$$

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, daß dieses Ergebnis äquivalent ist mit

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{R}) = 0 \quad (4.8)$$

Gleichung (4.8) wurde z.B. von *Vasyliunas* [1972] als Bedingung für Linienenerhaltung angegeben. Weil

$$\nabla \times \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta} \nabla \alpha - \frac{\partial Q}{\partial \alpha} \nabla \beta \right) \parallel \mathbf{B} \quad (4.9)$$

erfüllt ein nichtidealer Term $\mathbf{R}$ in der Form (4.7) offenbar (4.8). Wir müssen zeigen, daß aus (4.8) ein nichtidealer Term in der Form (4.7) folgt. Zu diesem Zwecke seien R^α , R^β und R^s gegeben als Funktionen von α, β und s . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{R} &= \frac{\partial R^\alpha}{\partial \beta} \nabla \beta \times \nabla \alpha + \frac{\partial R^\alpha}{\partial s} \nabla s \times \nabla \alpha \\ &+ \frac{\partial R^\beta}{\partial s} \nabla s \times \nabla \beta + \frac{\partial R^\beta}{\partial \alpha} \nabla \alpha \times \nabla \beta \\ &+ \frac{\partial R^s}{\partial \alpha} \nabla \alpha \times \nabla s + \frac{\partial R^s}{\partial \beta} \nabla \beta \times \nabla s \end{aligned} \quad (4.10)$$

Gültigkeit von (4.8) erfordert $\mathbf{B} \parallel \nabla \times \mathbf{R}$, also müssen die senkrechten Anteile von $\nabla \times \mathbf{R}$ verschwinden.

Daher folgt

$$\frac{\partial R^\alpha}{\partial s} - \frac{\partial R^s}{\partial \alpha} = 0 \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial R^\beta}{\partial s} - \frac{\partial R^s}{\partial \beta} = 0 \quad (4.11b)$$

Die allgemeine Lösung von (4.11) ist offenbar wieder gegeben durch (4.7). Damit ist Äquivalenz gezeigt.

Um eine linienenerhaltende Plasmabewegung zu bekommen, ist offensichtlich eine verhältnismäßig allgemeine Form des nichtidealen Terms $\mathbf{R}$ zulässig. *Vasyliunas* [1972] untersuchte eine Teilklasse hiervon, nämlich ein $\mathbf{R}$, welches Gradientenform hat. Nach den Ergebnissen über Linienenerhaltung liegt die Vermutung nahe, daß es auch bestimmte Formen von $\mathbf{R}$ gibt, die flußerhaltend sein können. Wir wollen hier einen neuen Beweis des z.B. von *Vasyliunas* [1972] formulierten Aussage, daß Flußerhaltung

$$\nabla \times \mathbf{R} = 0 \quad (4.12)$$

erfordert, liefern. Magnetische Flußerhaltung bedeutet, daß der Magnetfluß durch eine beliebige, durch die Plasmaströmung mittransportierte, geschlossene Kurve konstant ist [z.B. Parker, 1979]. Um ein Kriterium für Flußerhaltung zu bekommen, wenden wir die Ergebnisse der Hamilton'schen Mechanik an. Der Liouville'sche Satz besagt, daß die Fläche innerhalb einer geschlossenen Kurve, die durch einen Hamilton'schen Fluß abgebildet wird, zeitlich konstant ist [z.B. Goldstein 1978]. Mit der bekannten Flußkoordinateneigenschaft der Euler-Potentiale α und β [Johnson et al., 1958] folgt dann, daß die Dynamik der Euler-Potentiale im $\alpha - \beta$ -Raum divergenzfrei sein muß. Damit erhalten wir:

Eine Dynamik der Euler-Potentiale ist genau dann flußerhaltend, wenn sie den Hamilton'schen Gleichungen genügt. Offensichtlich erfordert dies, daß die dynamischen Gleichungen für α und β unabhängig von der Bogenlänge s sein müssen, da sonst die Dynamik abhängig von den Anfangsbedingungen wäre.

Also können wir eine beliebige Hamiltonfunktion $W(\alpha, \beta, t)$ definieren, welche die Dynamik der Euler-Potentiale erzeugt. Wir erhalten für die Zeitableitungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \beta} \quad (4.13a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad (4.13b)$$

Durch Vergleich leiten wir nun die Klasse der nichtidealen Terme R her, die zu einer Dynamik (4.13) führen. Dazu setzen wir die Funktion ψ aus (3.8) allgemein an als

$$\psi(\alpha, \beta, s, t) = W(\alpha, \beta, t) - Y(\alpha, \beta, s, t) \quad (4.14)$$

wobei W die obige Hamiltonfunktion ist und Y eine beliebige glatte Funktion von α, β, s und t sein soll.

Mit (3.8) erhalten wir dann die folgenden Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \beta} + \frac{\partial Y}{\partial \beta} - R^\beta \quad (4.15a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} - \frac{\partial Y}{\partial \alpha} + R^\alpha \quad (4.15b)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial s} = R^s \quad (4.15c)$$

Nach dem oben gesagten, müssen wir für Flußerhaltung die Gleichungen (4.15a) und (4.15b) dem

Satz (4.11) entsprechen, also müssen wir fordern:

$$R^\alpha = \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \quad (4.16a)$$

$$R^\beta = \frac{\partial Y}{\partial \beta} \quad (4.16b)$$

zusammen mit (4.15c). Damit ist die allgemeinste Form für $\mathbf{R}$ gefunden als

$$\mathbf{R} = \nabla Y \quad (4.17)$$

welches offensichtlich auch die allgemeine Lösung von (4.12) ist. Ein Vergleich mit (4.7) zeigt, daß der Unterschied zwischen linien- und flußerhaltender Dynamik hervorgerufen wird durch die Ableitungen der Funktion $Q(\alpha, \beta, t)$. Diese Ableitungen zerstören die Divergenzfreiheit der Dynamik, so daß im allgemeinen die Fläche innerhalb einer geschlossenen Kurve im $\alpha - \beta$ -Raum keine Erhaltungsgröße ist.

In den Kapiteln 6 und 7 über magnetische Rekonnexion werden wir im besonderen den Fall untersuchen, in dem die Nichtidealität $\mathbf{R}$ in einem relativ kleinen Gebiet D_R lokalisiert ist. Eine Lokalisierung von $\mathbf{R}$ bedeutet automatisch eine s -Abhängigkeit, da die Terme R^α , R^β und R^s nicht konstant auf Feldlinien sein können. Für linienerhaltende Plasmadynamik muß dann sowohl P_0 als auch Q in (4.6) identisch verschwinden. Damit ist die allgemeine Form von $\mathbf{R}$ für Linienhaltung und Lokalisierung:

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \nabla P_{0k} & \text{in } D_R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.18)$$

Dabei soll $\mathbf{R}$ stetige Funktion am Rand von D_R sein. Offensichtlich erfüllt $\mathbf{R}$ in der Form (4.18) auch (4.17), also haben wir folgenden Satz bewiesen

Satz Für eine lokalisierte Nichtidealität $\mathbf{R}$ ist eine Plasmadynamik genau dann flußerhaltend, wenn sie linienerhaltend ist.

Die Diskussion von Linien- und Flußerhaltung ermöglicht es nun, durch gezielte Verletzung dieser, im Falle lokalisierter Nichtidealität äquivalenten Bedingungen, zu einem verallgemeinerten Konzept von magnetischer Rekonnexion zu gelangen. Dieses ist das Ziel der Kapitel 5 bis 7.

5. Allgemeine magnetische Rekonnexion, topologischer Ansatz

5.1. Globale topologische Aspekte

In diesem Abschnitt soll im abstrakten Rahmen topologieerhaltender Transformationen untersucht werden, welche möglichst allgemeinen mathematischen Bedingungen an Magnetfeldevolution und Plasmabewegung zu stellen sind, um eine Zeitentwicklung als magnetische Rekonnexion identifizieren zu können.

Dazu definieren wir: Seien Ω und $\hat{\Omega}$ kompakte, einfach zusammenhängende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$. Analog zu Arnold [1983] wollen wir topologische Äquivalenz zweier durch Differentialgleichungen definierter Flüsse erfassen. Dazu definieren wir zuerst den Phasenfluß eines Vektorfeldes:

Definition 1: Sei $\mathbf{B} : \Omega \rightarrow \Omega$ eine stetige Abbildung. Dann ist der Phasenfluß des dynamischen Systems

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{r} \in \Omega$$

gegeben durch die Familie von Abbildungen $g^\tau : \Omega \rightarrow \Omega$, die jede Anfangsbedingung $\mathbf{r}(\tau = 0)$ auf den Ort $\mathbf{r}(\tau)$ abbildet.

Mit dem Phasenfluß zweier Vektorfelder wird topologische Äquivalenz definiert:

Definition 2: Seien

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (a)$$

und

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\tau} = \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{r}}); \quad \hat{\mathbf{r}} \in \hat{\Omega} \quad (b)$$

zwei dynamische Probleme erzeugt durch die Vektorfelder $\mathbf{B}$ und $\hat{\mathbf{B}}$. Diese Systeme heißen topologisch äquivalent, wenn es einen Homöomorphismus, also eine stetige und umkehrbar stetige Abbildung gibt, die Ω auf $\hat{\Omega}$ abbildet und den Phasenfluß von (a) in den von (b) überführt. Wenn φ ein solche Homöomorphismus ist und g^τ bzw. $\hat{g}^\tau$ die Phasenflüsse von (a) und (b) sind, bedeutet dies formal:

$$\varphi(g^\tau(\mathbf{r})) = \hat{g}^\tau(\varphi(\mathbf{r}))$$

oder, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{g^r} & \Omega \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \hat{\Omega} & \xrightarrow{\hat{g}^r} & \hat{\Omega} \end{array}$$

Es ist klar, daß die Trajektorien von topologisch äquivalenten Systemen aufeinander abgebildet werden.

Topologisch äquivalent bedeutet topologisch ununterscheidbar. Diese Ununterscheidbarkeit impliziert, daß die Struktur der beiden Felder speziell in Bezug auf eventuell vorhandene Singularitäten, stets identisch ist, wie aus der Katastrophentheorie bekannt ist [z.B. *Bröcker*, 1975].

Für die linearisierten Flüsse zweier topologisch äquivalenter Systeme läßt sich eine Aussage über die Eigenwerte der Abbildung gewinnen. Es gilt nämlich [*Arnold*, 1980]:

In dem Fall, daß das nichtlineare System

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (5.1)$$

bei $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ einen Fixpunkt hat, d.h. $\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = 0$, so folgt, daß die Trajektorien in einer Umgebung von $\mathbf{r}_0$ topologisch äquivalent sind zu

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\nabla \mathbf{B})(\mathbf{r}_0) \quad (5.2)$$

wenn die Eigenwerte von $(\nabla \mathbf{B})(\mathbf{r}_0)$ nichtverschwindenden Realanteil haben. Für lineare Systeme gilt nun der Satz [*Arnold*, 1980]

Satz 1: Zwei lineare Systeme (ohne Einschränkung auf demselben Grundgebiet),

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} \quad (5.3)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \underline{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{r} \quad (5.4)$$

deren Eigenwerte (d.h., die Eigenwerte von $\underline{\mathbf{A}}$ bzw. $\underline{\mathbf{B}}$) nichtverschwindende Realteile haben, sind genau dann topologisch äquivalent, wenn die Zahl der Eigenwerte mit positivem Realteil und damit auch die Zahl der Eigenwerte mit negativem Realteil übereinstimmt.

Von Bedeutung für die spätere Diskussion ist noch die folgende Aussage [Arnold, 1980]

Satz 2 Jedes lineare System

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{r} \quad (5.5)$$

dessen Operator $\underline{\mathbf{A}} : R^n \rightarrow R^n$ keine Eigenwerte mit verschwindendem Realteil besitzt, ist einem Standardsattel

$$\frac{dx_1}{d\tau} = -x_1, \quad x_1 \in R^{m_-}$$

$$\frac{dx_2}{d\tau} = x_2, \quad x_2 \in R^{m_+}$$

$[m_+$: Zahl der Eigenwerte mit positivem Realteil, $m_+ + m_- = n]$ topologisch äquivalent.

Zur Vervollständigung müssen nun noch die Fälle rein imaginärer Eigenwerte und verschwindender Eigenwerte behandelt werden. Im für uns relevanten Fall $n = 3$ mit $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ impliziert die Existenz zweier komplex-konjugierter rein imaginärer Eigenwerte stets, daß der dritte verschwindet. Daher behandeln wir diesen zuerst.

Topologische Aussagen über die Trajektorien in der Umgebung der Singularität lassen sich (wie aus der Katastrophentheorie bekannt) hier nicht allein aus dem linearen Anteil von $\mathbf{B}$ gewinnen. Statt dessen sind höhere Ableitungen wichtig. Dieses verkompliziert die *lokale* Diskussion erheblich. Wir wollen daher den nichtgenerischen Fall, daß eine solche Singularität (deren linearer Teil einen verschwindenden Eigenwert hat) isoliert auftritt, hier ausschließen und statt dessen annehmen, daß eine solche Singularität stets Teil einer "Liniensingularität", d.h. einer eindimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit, auf der $\mathbf{B}$ verschwindet, ist. Dieses erscheint durch physikalische Anwendungen (X-Linien und O-Linien) nahegelegt. Es ist nun offensichtlich, daß eine solche neutrale Linie eine topologische Invariante ist, d.h., wenn zwei nichtlineare Probleme

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (5.6)$$

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\tau} = \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{r}}); \quad \hat{\mathbf{r}} \in \hat{\Omega} \quad (5.7)$$

topologisch äquivalent sind und das eine enthält eine neutrale Linie, so muß auch das andere eine solche enthalten.

Beweis: Sei

$$\varphi : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}$$

der Homöomorphismus, der $\mathbf{B}$ in $\hat{\mathbf{B}}$ überführt und

$$\varphi^{-1} : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$$

seine Umkehrabbildung. Außerdem sei

$$l :]a, b[\rightarrow \Omega$$

$$s \rightarrow \mathbf{r}(s)$$

eine Parametrisierung der Neutrallinie. Dann ist jeder Punkt eine eindimensionale Trajektorie, d.h. ein Fixpunkt von (5.6). Aufgrund der topologischen Äquivalenz folgt, daß $\varphi(l)$ wieder ein Fixpunkt von (5.7) ist und daher das ganze Bild der Neutrallinie eine Neutrallinie.

Aufgrund der Homöomorphie ist es nun weiter klar, daß geschlossene Trajektorien (der Fall zweier imaginärer Eigenwerte) wieder in geschlossene Trajektorien abgebildet werden. Damit haben wir: Besitzt eines von zwei topologisch äquivalenten divergenzfreien Vektorfeldern auf $\Omega \subset R^3$ eine O-Linie, so besitzt das andere sie auch. Da für eine neutrale Schicht eine analoge Argumentation wie für eine Neutrallinie gilt, ist auch das Vorhandensein einer Neutralschicht eine topologische Invariante. Als wesentliche Linien-singularität bleibt die X-Linie. Da die Existenz von Neutrallinien und Separatrizen, weil sie Trajektorien sind, topologisch invariant ist, folgt auch: Zwei topologisch äquivalente divergenzfreie Vektorfelder auf $\Omega \subset R^3$ besitzen die gleiche Anzahl von X-Linien.

Die Homöomorphismen, die im weiteren analysiert werden, seien Abbildungen $\varphi : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}(t)$, wobei der Bildraum abhängig von der physikalischen Zeit sein darf. Der Zusammenhang zwischen Ω und $\hat{\Omega}(t)$ folgt aus der Betrachtung der Plasmabewegung weiter unten. Weiterhin werden sowohl Ω als auch $\hat{\Omega}(t)$ als Teilmengen des R^3 verstanden und die Koordinaten einheitlich mit $\mathbf{r} \in R^3$ bezeichnet.

Die wesentlichen Komponenten, die in die mathematische Definition allgemeiner magnetischer Re-konnexion eingehen, sind das Magnetfeld und die Plasmabewegung, die identisch ist mit dem Phasenfluß

des Geschwindigkeitsfelds

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \in C^\infty(\hat{\Omega}(t) \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3) \quad (5.8)$$

auf dem zeitabhängigen Grundgebiet $\hat{\Omega}(t)$. Physikalisch bedeutet es keine Einschränkung vorauszusetzen, daß das Geschwindigkeitsfeld auf ganz Ω definiert ist und es damit keine Gebiete in Ω gibt, die vollständig frei von Plasma sind. Wie im Lagrange-Bild der Hydrodynamik definiert dieses Geschwindigkeitsfeld Abbildungen, den Phasenfluß des Geschwindigkeitsfeldes

$$\mathbf{P}^t \in C^\infty(\Omega, \hat{\Omega}(t))$$

$$\mathbf{P}^t(\mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0 + \int_0^t dt' \mathbf{v}(\mathbf{P}^{t'}(\mathbf{r}_0), t') \quad (5.9)$$

der im weiteren als Plasmabewegung bezeichnet wird.

Da $\mathbf{v}$ als differenzierbare Funktion stets eine Lipschitzbedingung in t erfüllt, zeigt der Satz von Picard-Lindelöf [z.B. *Kamke*, 1962], daß $\mathbf{P}^t$ existiert, differenzierbar ist und als Abbildung auch umkehrbar mit differenzierbarem Inversen ist [z.B. *Birkhoff und Rota*, 1962]. Damit wird $\mathbf{P}^t$ automatisch zu einem Homöomorphismus (sogar zu einem Diffeomorphismus). Außerdem liegt hiermit auch der Zusammenhang zwischen Ω und $\hat{\Omega}(t)$ fest: Aus Konsistenzgründen sei

$$\hat{\Omega}(t) := \mathbf{P}^t(\Omega) \quad (5.10)$$

Damit ist $\hat{\Omega}(t)$ als Bild der kompakten Menge Ω unter dem Homöomorphismus $\mathbf{P}^t$ automatisch wieder kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ wie gefordert. Wenn wir asymptotisch die Plasmabewegung als verschwindend annehmen können, läßt sich sogar $\hat{\Omega}(t) = \Omega$ wählen; hier soll jedoch der allgemeinste Fall beschrieben werden.

Die andere hier interessierende Evolution, nämlich die des Magnetfeldes, ist gegeben durch das elektrische Feld

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (5.11)$$

Integration über die Zeit liefert dann $\mathbf{B}(0)$ und $\mathbf{B}(t)$ welche zwei Systeme definieren:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(0, \mathbf{r}) \quad (5.12)$$

auf Ω und

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \quad (5.13)$$

auf $\hat{\Omega}(t)$.

Bevor Abbildungen zwischen diesen Systemen untersucht werden (die Zeit t sei zunächst fest), wollen wir zunächst die weitere mathematische Diskussion durch ein intuitives Konzept von allgemeiner magnetischer Rekonnexion motivieren. Eine intuitive Vorstellung von allgemeiner magnetischer Rekonnexion würde beinhalten, daß Plasmaelemente in einem Rekonnexionsprozeß in irgendeiner Weise ihre Verbindung durch magnetische Feldlinien verändern. Dies bedeutet, daß die magnetische Linienenerhaltung verletzt sein muß. Wie im weiteren ersichtlich wird, kann dies auf zwei Weisen geschehen.

Vorab wollen wir eine geeignete Definition von magnetischer Linienenerhaltung in diesen Zusammenhang stellen. Magnetische Linienenerhaltung läßt sich mathematisch wie folgt definieren:

Eine Plasmaströmung $\mathbf{P}^t$ heißt linienerhaltend, wenn aus der Aussage: $\mathbf{r}_0$ und $\mathbf{r}_1$ liegen auf derselben Trajektorie von $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(0, \mathbf{r})$ folgt, daß $\mathbf{P}^t(\mathbf{r}_0)$ und $\mathbf{P}^t(\mathbf{r}_1)$ wieder auf einer gemeinsamen Trajektorie von $\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ liegen.

Hieraus folgt sofort:

Eine Plasmaströmung ist linienerhaltend genau dann, wenn $\mathbf{P}^t$ Homöomorphismus zwischen den Systemen (5.12) und (5.13) für alle betrachteten Zeiten t ist.

Beweis: Sei $\mathbf{P}^t$ Homöomorphismus zwischen $\mathbf{B}(0)$ und $\mathbf{B}(t)$. Damit bildet $\mathbf{P}^t$ Trajektorien von $\mathbf{B}(0)$ auf die von $\mathbf{B}(t)$ in bijektiver Weise ab. Daher bewegen sich insbesondere Plasmaelemente, welche anfänglich durch eine Trajektorie verbunden waren, wieder auf eine gemeinsame Trajektorie. Andererseits gilt: Bildet $\mathbf{P}^t$ irgend zwei Plasmaelemente, die anfänglich auf einer gemeinsamen Trajektorie lagen, wieder auf eine gemeinsame Trajektorie ab, so gilt dies für alle Elemente einer beliebigen Trajektorie, also für die ganze Trajektorie. Damit wird eine jede Trajektorie des Ursprungfeldes als ganzes auf eine Trajektorie des späteren Feldes in bijektiver Weise abgebildet.

Es ist nun stets möglich, eine Klasse von Abbildungen $\{F\}$ zwischen Ω und $\hat{\Omega}(t)$ zu konstruieren, die zudem die Phasenflüsse der beiden Vektorfelder $\mathbf{B}(0)$ und $\mathbf{B}(t)$ aufeinander abbilden; es ist jedoch ohne

weiteres nicht klar, welche Eigenschaften ein Element dieser Klasse haben wird. Aus der Definition von topologischer Äquivalenz folgt nun, daß, falls ein Element $\varphi \in \{F\}$ existiert, welches ein Homöomorphismus ist, beide Systeme topologisch äquivalent sind.

Dieses führt zu einer ersten Unterscheidung: Entweder sind die Vektorfelder $B(0)$ und $B(t)$ topologisch äquivalent oder nicht.

Im Sinne des intuitiven Rekonnexionskonzeptes bedeutet eine topologische Verschiedenheit der beiden Systeme, daß die Plasmabewegung unmöglich ein Homöomorphismus sein kann, der die beiden Systeme topologisch äquivalent macht, da es eine solche Abbildung überhaupt nicht gibt. Daher muß in diesem Fall die Linienhaltung verletzt sein. Ein Beispiel hierfür ist die Tearing-Instabilität in ebenen Magnetfeldern, wo zur späteren Zeit, im Gegensatz zu anfänglichen Feldkonfiguration, das Feld geschlossene Feldlinien aufweist.

Der zweite Fall ist der, in dem das Magnetfeld zu späteren Zeiten seinem Ausgangszustand topologisch äquivalent ist. In dieser Situation wird die Verträglichkeit der Plasmabewegung mit der zeitlichen Änderung des Magnetfeldes bedeutend.

Wenn die Plasmabewegung P^t ein (homöomorphes) Element aus $\{F\}$ ist, so werden offensichtlich alle Plasmaelemente, die zur Zeit $t = 0$ durch eine Feldlinie verbunden waren, auf eine gemeinsame Feldlinie des Magnetfelds zur Zeit t abgebildet. Dieses Verhalten impliziert einen Topologieerhalt der Gesamtstruktur Plasma-Magnetfeld, und, von einem topologischen Standpunkt aus, sind Ausgangs- und Endzustand identisch. Geleitet durch die intuitive Vorstellung von allgemeiner magnetischer Rekonnexion können wir zusammenfassend formulieren: Für allgemeine magnetische Rekonnexion ist es notwendig, daß entweder

- Anfangs- und Endzustand des Magnetfeldes topologisch nicht äquivalent sind
- oder
- Die Plasmabewegung keinen Homöomorphismus zwischen den durch das Magnetfeld zu verschiedenen Zeiten definierten Systemen darstellt.

Diese Überlegungen legen die topologische Definition von allgemeiner magnetischer Rekonnexion

nahe, die im folgenden geliefert wird:

Definition: Eine Zeitentwicklung des Magnetfeldes zusammen mit der Plasmabewegung auf einer kompakten, einfach zusammenhängenden Menge $\Omega \subset R^3$ heißt **allgemeine magnetische Rekonnexion**, wenn es ein t_0 , $\delta > 0$ und $0 < \epsilon < 1$ gibt, so daß für alle $t < t_0$ in dem Zeitintervall $[0, t]$ gilt:

Wenn $P^t : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}(t)$; $\hat{\Omega}(t) \subset R^3$ die Abbildung ist, die jedem Plasmaelement am Ort $r_0 \in \Omega$ zur Zeit $t = 0$ seinen Ort $r(t; x_0)$ zur Zeit t zuweist, dann existieren kompakte Teilmengen $D_R^- \subset \Omega$; $D_R^+ \subset \hat{\Omega}(t)$

mit

$$1. \delta < V(D_R^-), V(D_R^+) < \epsilon V(\Omega), \epsilon V(\hat{\Omega}(t)) \text{ [Lebesgue-Maß]}$$

$$2. D_R^- \cap D_R^+ \neq \emptyset \text{ in } R^3$$

so daß P^t aufgefaßt als Abbildung von $\Omega \setminus D_R^-$ nach $\hat{\Omega}(t) \setminus D_R^+$ ein Homöomorphismus zwischen den dynamischen Problemen

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(t = 0, \mathbf{r}) \text{ auf } \Omega \setminus D_R^-$$

und

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) \text{ auf } \hat{\Omega}(t) \setminus D_R^+$$

ist, während die nichteingeschränkte Abbildung $P^t : \Omega \rightarrow \hat{\Omega}(t)$ kein Homöomorphismus zwischen den Vektorfeldern $\mathbf{B}(0)$ auf ganz Ω und $\mathbf{B}(t)$ auf ganz $\hat{\Omega}(t)$ ist. δ bestimmt eine untere Grenze der Volumina von D_R^- und D_R^+ . Die Gebiete D_R^- und D_R^+ werden im allgemeinen von t abhängen.

Zur Illustration dieser Definition dienen Bilder 5.1 und 5.2. Es ist notwendig, die Mengen D_R^- und D_R^+ voneinander zu unterscheiden. Gäbe es nämlich immer nur eine Menge $D_R = D_R^+ = D_R^-$, so dürfte die Plasmabewegung keine Elemente aus $\Omega \setminus D_R$ nach $D_R \subset \hat{\Omega}(t)$ abbilden und keine Elemente aus $D_R \subset \Omega$ nach $\hat{\Omega}(t) \setminus D_R$, da die Plasmabewegung sonst kein Homöomorphismus zwischen $\Omega \setminus D_R$ und $\hat{\Omega}(t) \setminus D_R$ wäre.

Es ist aber klar, daß im Limes ($t \rightarrow 0$) D_R^- und D_R^+ zusammenfallen. Daher wäre es auch möglich gewesen, diesen infinitesimalen Grenzfall zur Definition von magnetischer Rekonnexion zu verwenden,

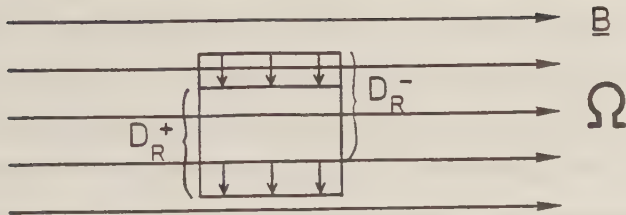


Bild 5.1 Wahl von D_R^+ und D_R^- für nichtsinguläres B , die Pfeile bezeichnen die Plasmabewegung. Der Einfachheit halber ist hier $\Omega = \hat{\Omega}(t)$ gewählt.

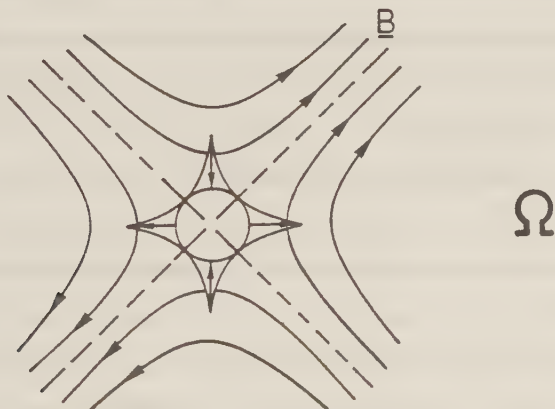


Bild 5.2 Beispiel für die Wahl von D_R^+ und D_R^- für singuläres B . Auch hier sei der Einfachheit halber $\Omega = \hat{\Omega}(t)$.

jedoch schließt die Definition diesen ein und es scheint aus physikalischen Gründen sinnvoller, Rekonnexion über endliche Zeitintervalle zu definieren.

Die Einführung einer unteren Grenze δ der Volumina der Gebiete D_R^- und D_R^+ stammt von der physikalisch orientierten Überlegung, daß nur endliche Abweichungen von der Topologieerhaltung des

Gesamtsystems einen endlichen physikalischen Effekt haben können und die zweite Bedingung stellt sicher, daß die Gebiete stetig auseinander hervorgehen.

Die allgemeine Definition beinhaltet offenbar beide oben diskutierten Fälle, nämlich den Fall, wo der Endzustand des Feldes zu dem Ausgangspunkt topologisch äquivalent ist und den, wo das nicht der Fall ist. Im zweiten Fall bedeutet die Definition zum einen, daß es Gebiete geben muß, so daß die Anfangs- und Endzustände des Magnetfeldes außerhalb dieser jeweiligen Gebiete topologisch äquivalent sind, und zum anderen, daß die Plasmabewegung außerhalb dieser Gebiete einen möglichen Homöomorphismus zwischen den Systemen definiert.

An dieser Stelle soll noch erwähnt werden, daß eine Plasmabewegung, die weder einen Homöomorphismus zwischen den Feldern $\mathbf{B}(t=0)$ und $\mathbf{B}(t)$ definiert noch der Definition von magnetischer Rekonnexion genügt, dem Konzept der Plasmadiffusion entspricht. Diese Arbeit befaßt sich jedoch nicht mit der gut verstandenen Diffusion.

Die interessantesten Fälle allgemeiner magnetischer Rekonnexion sind diejenigen, wo das physikalische Volumen des Gebietes $D_R = D_R^- \cup D_R^+$ viel kleiner ist als das Gesamtvolumen des Grundgebietes, weil in vielen plasmaphysikalischen und speziell astrophysikalischen Anwendungen der "nichtideale" Bereich $D_R^- \cup D_R^+$ lokalisiert [z.B. *Vasyliunas*, 1975] ist.

In allen weiteren Kapiteln sollen nun Spezialfälle dieser allgemeinsten Definition untersucht werden. Als Vorbereitung dazu wollen wir das insbesondere bei Neutralpunkten wesentliche topologische Konzept der Separatrix untersuchen. Eine Separatrix wird definiert durch:

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ kompakt, $\mathbf{B} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbare, divergenzfreie Abbildung und $\mathbf{r}_0 \in \Omega$ isolierter singulärer Punkt, d.h.,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_0) = 0$$

und

$$\delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) \neq 0 \quad \forall \delta \mathbf{r} \neq 0$$

Dann heißt die Fläche, die aufgespannt wird durch alle Feldlinien, welche in der Singularität enden oder

durch alle Feldlinien, die von der Singularität ausgehen, Separatrix des isolierten Neutralpunkts.

Die zweite Bedingung bedeutet, daß der Tensor $\nabla \mathbf{B}$ an der Stelle $\mathbf{r}_0$ keine verschwindenden Eigenwerte besitzt. Dann impliziert die topologische Äquivalenz eines isolierten Neutralpunktes zu einem Standardsattel (Satz 2) für divergenzfreie Felder, daß solch eine Fläche tatsächlich existiert.

Falls $\mathbf{B}$ verschwindet auf einer Linie und $(\nabla \mathbf{B})$ auf dieser Linie stets zwei Eigenwerte mit nichtverschwindendem Realteil besitzt, ist die Separatrix die Fläche, die aufgespannt wird durch die Feldlinien, welche an der Neutrallinie beginnen bzw. enden. Offensichtlich ist eine Separatrix die stabile oder instabile Mannigfaltigkeit eines Fixpunktes oder einer Familie (Linie) von Fixpunkten von $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$.

Nach den bisher geläufigen, in der Einleitung erwähnten, Konzepten von magnetischer Rekonnexion, welche sich praktisch ausschließlich auf die Existenz von Separatrizen stützte, ist Rekonnexion verbunden mit einem Plasmastrom in "Gebiete unterschiedlicher Topologie", die im folgenden Abschnitt erklärt werden. Diesem sich mehr an der Struktur des Magnetfeldes orientierendem Ansatz ziehen wir jedoch das vorliegende Konzept vor, welches die Topologie des Gesamtsystems aus Plasma und Magnetfeld als Basis verwendet.

Die klassische, durch *Vasyliunas* [1975] definierte magnetische Rekonnexion, ein Spezialfall der hier definierten allgemeinen magnetischen Rekonnexion, wird im Kapitel 6 untersucht. Der interessantere neue Aspekt der Definition ist, daß sie auch Fälle einschließt, in denen das Magnetfeld keine Singularitäten in D_R besitzt. Die Analyse dieses Aspektes ist das Thema des Kapitels 7.

5.2. Lokale topologische Aspekte

Die wohl meistbekannte klassische Definition von magnetischer Rekonnexion [Vasyliunas, 1975] benutzt das Konzept von "Feldlinien verschiedener Topologie". Als Vorbereitung auf das Kapitel 6 zum "Magnetic Merging" soll hier das topologische Konzept dazu gegeben werden. Dazu brauchen wir die Plasmabewegung nicht zu betrachten. Topologie von Trajektorien ist aus der Literatur [z.B. Arnold, 1980; Thirring, 1977] bereits bekannt. Wir wollen dies am Beispiel eines kompakten Teilraums des Phasenraums eines eindimensionalen Pendels erläutern.

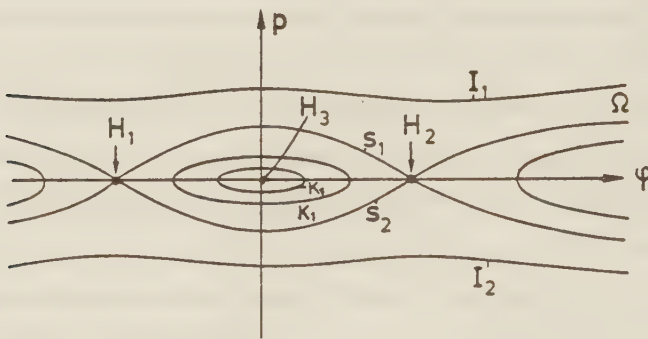


Bild 5.3 Illustration eines Teilraums des Pendelphasenraums

Die verschiedenen Typen von Trajektorien in diesem Beispiel sind schematisch dargestellt in Bild 5.3. Topologische Äquivalenz von Trajektorien bedeutet, daß sich ein Homöomorphismus finden läßt, der die Trajektorie auf das äquivalente Objekt abbildet. Die Trajektorien I_1 und I_2 sind auf Ω äquivalent zu abgeschlossenen Intervallen, die Separatrizen s_1 und s_2 entsprechen topologisch jeweils der gesamten reellen Achse, die Fixpunkte H_1, H_2 und H_3 sind topologisch nur Punkten äquivalent, und schließlich sind die geschlossenen Trajektorien topologische Kreise.

Analog können wir dieses Konzept nun fortsetzen für Fälle, wo B einen Neutralpunkt oder eine neutrale Linie besitzt. Dazu stellen wir fest, daß offensichtlich jede Linie, die Bestandteil einer Separatrix

gemäß ihrer Definition ist, topologisch äquivalent entweder der halben reellen Achse, (falls ein Endpunkt am Rand von Ω liegt und in der anderen Richtung die Feldlinie gegen den Neutralpunkt strebt) oder der ganzen reellen Achse, falls die Feldlinie asymptotisch zwei Neutralpunkte verbindet. Den letzten Fall wollen wir im Rahmen der lokalen Analyse jedoch ausschließen. Hiermit ist der Begriff der Feldlinien verschiedener Topologie, wie von er von *Vasyliunas* verwendet wird (vgl. Kapitel 1), mathematisch geklärt.

Die hieraus resultierende Erkenntnis, daß solche lokalen topologischen Unterschiede nur dann auftreten können, wenn das Feld Neutralpunkte enthält, wird untermauert durch den folgenden Satz aus der Literatur [*Arnold*, 1982]

Satz 3: Zu einer hinreichend kleinen Umgebung eines nichtsingulären Punktes ist das Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ einem konstantem Feld $\mathbf{e}$ diffeomorph.

Diffeomorph bedeutet, daß ein Diffeomorphismus, d.h. eine differenzierbare Koordinatentransformation existiert, die die Differentialgleichungen

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

in

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{e}$$

($\mathbf{e}$: beliebiger Einheitsvektor) ineinander überführt.

Dieser letzte Satz liefert die entscheidende Motivation, bei der physikalisch orientierten Definition magnetischer Rekonnexion für Magnetfelder ohne Singularitäten in der nichtidealen Region, von einem sich an lokaler Topologie orientierendem Ansatz abzusehen (Kapitel 7).

Das Ziel der folgenden Kapitel ist, die allgemeine mathematische Formulierung dieses Kapitels in einer mehr physikalisch orientierten Schreibweise darzustellen und dann auf einfache Modelle anzuwenden.

6. Magnetic Merging, B=0-Rekonnexion

6.1 Einführung

In diesem Kapitel wird das klassische Rekonnexionskonzept des Mergings an Neutrallinien durch den in den vorhergehenden Kapiteln entwickelten Formalismus ausgedrückt. Diese Formulierung eröffnet die Möglichkeit, *Vasyliunas'* [1975] Theorem, welches besagt, daß Merging eine elektrische Feldkomponente parallel zum Separator erfordert, für Neutrallinien exakt zu beweisen.

Wie schon in der Einleitung angeführt, ist der am häufigsten theoretisch untersuchte Fall des Mergings der stationäre Fall. Neben stationären Situationen spielen aber auch explizit zeitabhängige Rekonnexionsvorgänge eine bedeutende Rolle. Ein wichtiges Beispiel ist hier die Tearing-Instabilität [z.B. *Furth et al.*, 1963; *Schindler*, 1974; *Galeev und Zelenyi*, 1976], d.h., dynamische Neutralpunktformation und damit verbundene Topologieänderung des (zweidimensionalen) Magnetfeldes. Der Rekonnexionsvorgang bei Tearing wird, ebenso wie bei stationärer Neutralpunktrekonnexion, durch ein simples prinzipielles Modell im Rahmen des vorbereiteten Formalismusses beschrieben.

Der Vollständigkeit halber wird sich Abschnitt 6.3 mit Singularitäten der Euler-Potentialdarstellung an Neutralpunkten des Magnetfeldes beschäftigen; es wird gezeigt, daß derartige Singularitäten allein der speziellen Koordinatenwahl zuzuschreiben und daher leicht beherrschbar sind.

Als letzter Teil dieses Kapitels wollen wir versuchen, einen Einblick in die globale topologische Struktur einer Magnetosphäre zu geben und kurz eine Möglichkeit der Rekonnexion an der Magnetopause anführen. Besonderer Wert wird dort auf den globalen topologischen Aspekt der durch isolierte Neutralpunkte definierten Separatrizen gelegt.

6.2. Rekonnexion an X-Punkten im Euler-Potentialbild

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Darstellung und Umformulierung der klassischen Neutralpunkt-Rekonnexion. In dieser Formulierung ist es möglich, einen exakten Beweis von *Vasyliunas'* Theorem [1975], welches für Merging eine Komponente des elektrischen Feldes entlang der magnetischen X-Linie fordert, zu geben.

Magnetic Merging setzt die Existenz eines X-Punktes (Bild 1.1) bzw. einer X-Linie (oder Separators) voraus. Ursprünglich wurde von *Vasyliunas* auch eine Magnetfeldkomponente senkrecht zur lokalen X-Struktur zugelassen. Unsere Untersuchungen werden jedoch zeigen, daß der Übergang von einem echten Neutralpunkt oder einer echten Neutrallinie zu einem nichtverschwindenden Magnetfeld eine strukturelle Instabilität der ursprünglichen Definition zeigt (Kapitel 7) oder, daß in wichtigen Beispielen von Rekonnexionsprozessen keine Separatrizen existieren (Kapitel 8). Aus diesem Grunde ziehen wir es vor, Merging auf Fälle zu beschränken, wo das Magnetfeld singuläre Punkte oder Linien in dem nichtidealen Gebiet besitzt.

Unter dieser Bedingung ist es von vornherein klar, daß Merging, welches definitionsgemäß eine Plasmabewegung über eine Separatrix in Gebiete anderer magnetischer Feldtopologie involviert, ein Teilaspekt von allgemeiner magnetischer Rekonnexion (vgl. Kapitel 5) sein muß. Der Plasmatransport auf Feldlinien verschiedener Topologie impliziert nämlich, daß die Plasmabewegung kein Homöomorphismus, der die Feldlinien des Magnetfeldes zu zwei verschiedenen Zeiten auf dem ganzen Grundgebiet aufeinander abbildet, sein kann. Schränkt man das Grundgebiet dagegen geeignet ein, so zeigt Bild (5.2) exemplarisch, daß die Bedingungen der Definition allgemeiner magnetischer Rekonnexion erfüllt sind.

Wie bereits in Kapitel 2 gezeigt wurde, können wir lokal an jedem Punkt einer X-Linie das Magnetfeld beschreiben durch Euler-Potentiale α und β , wobei

$$\nabla\alpha|_{NL} \parallel \nabla\beta|_{NL} \quad (6.1a)$$

oder

$$\nabla\alpha = 0 \text{ oder } \nabla\beta = 0 \quad (6.2b)$$

auf der Neutrallinie, weil dort $\mathbf{B}$ verschwindet. Ohne Einschränkung können wir daher annehmen, daß $\nabla\alpha$ an der Neutrallinie nur eine Komponente parallel zu $\nabla\beta$ besitzt oder dort verschwindet. Die Separatrizen, also die Feldflächen, welche sich am Separator schneiden, sind im Euler-Potentialbild gegeben durch eine spezielle Kombination aus Werten von α und β . Da $\nabla\alpha$ an der Neutrallinie nur eine Komponente parallel zu $\nabla\beta$ hat oder dort verschwindet, läßt sich α am Separator durch β und die Zeit parametrisieren, da sich die Werte von β als Koordinate entlang des Separators verwenden lassen. Damit ergibt sich die folgende Parametrisierung der Neutrallinie durch β -Werte:

$$\beta(x, y, z, t) = \beta_0 \quad (6.2a)$$

$$\alpha(x, y, z, t) = \alpha_0(\beta_0, t) \quad (6.2b)$$

Die Funktion $\alpha_0(\beta_0, t)$ beschreibt die Variation von α mit β auf der Neutrallinie, wobei die Zuordnung der α zu den β -Werten natürlich auch zeitabhängig sein darf.

Weiter wollen wir voraussetzen, daß die Neutrallinieneigenschaft nicht durch die Dynamik gestört wird. Diese Voraussetzung ist zu verstehen als Konsistenzbedingung an die Theorie der Rekonnexion an X-Linien; wie später gezeigt wird (Kapitel 7), brechen die Sätze über X-Linien Rekonnexion zusammen, falls $\mathbf{B}$ in der nichtidealen Region nichtsingulär wird.

Obwohl es prinzipiell möglich ist, die Analyse von Magnetic Merging in dieser allgemeinen Form durchzuführen, wollen wir diesen Weg nicht beschreiten. Statt dessen bringen wir das Problem vermittels einer geeigneten Eichtransformation in eine Form, die es ermöglicht, die Analyse wesentlich übersichtlicher durchzuführen.

Gleichungen (6.2) ordnen zeitabhängig jeden β -Wert für den die Separatrix existiert, einen α -Wert zu. Wir geben nun eine Eichtransformation an, die α' auf der Neutrallinie konstant werden läßt. Die Eichtransformation ist gegeben durch die Erzeugende

$$G = \alpha\beta' - \int^{\beta'} d\beta \alpha_0(\beta, t) \quad (6.3)$$

Damit werden die neuen Potentiale

$$\alpha' = \alpha - \alpha_0(\beta', t)$$

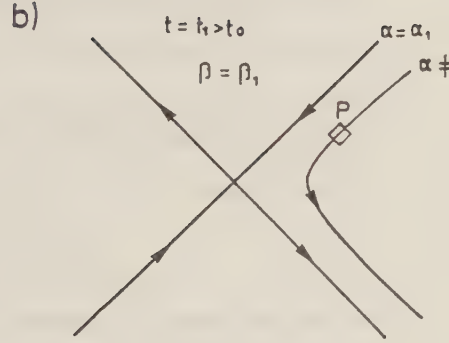
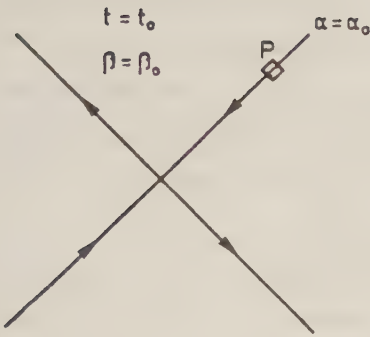


Bild 6.1 Schematische Darstellung des Merging-Prozesses. Der Papierebene entspricht in Bild a) die $\beta = \beta_0$ Ebene und in Bild b) die $\beta = \beta_1$ Ebene. Das Plasmaelement P befindet sich zur Zeit t_0 auf der Separatrix und zur Zeit t_1 nicht mehr.

$$= \alpha - \alpha_0(\beta, t) \quad (6.4a)$$

da

$$\beta' = \beta \quad (6.4b)$$

Offensichtlich ist also für alle Zeiten an dem Separator und damit auch an der Separatrix

$$\alpha'|_{\text{Separator}} = 0 \quad (6.5)$$

An dieser Stelle muß noch bemerkt werden, daß Gleichung (6.5) auch das Verschwinden der Zeitableitung von α' am Separator impliziert, also

$$\left(\frac{\partial \alpha'}{\partial t}\right)_{\text{Separator}} = 0 \quad (6.6)$$

Dieses ist eine Konsequenz der Tatsache, daß wir mit der Eichtransformation (6.3) implizit die Kenntnis der zeitabhängigen Lösung der Dynamik von α und β vorausgesetzt haben. In dieser abstrakten Analyse ist die Annahme der Kenntnis der Lösung legitim. Im weiteren soll diese Eichung vorausgesetzt werden und statt α' wieder α geschrieben werden.

Bild 6.1 veranschaulicht Neutrallinien Rekonnexion. Wir zeigen nun, daß eine Plasmabewegung über die Separatrix in einem Bereich, wo das ideale Ohm'sche Gesetz (3.11) gilt, eine elektrische Feldkomponente parallel zum Separator und damit eine Nichtidealität erfordert. Im idealen Bereich gelten Gleichungen (3.12). Damit kann die Dynamik der Euler-Potentiale über nur von α und β und der Zeit t über $\psi(\alpha, \beta, t)$ abhängen und nicht von der Bogenlänge s . Wir erhalten aus (3.12a)

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\alpha = -\frac{\partial\psi(\alpha, \beta, t)}{\partial\beta} \quad (6.7)$$

Falls am Separator ebenfalls das ideale Ohm'sche Gesetz gilt, so ist dort

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial\psi(\alpha=0, \beta, t)}{\partial\beta} = 0 \quad (6.8)$$

da die gewählte Eichung impliziert, daß $\nabla\alpha$ am Separator verschwindet. Damit wird dann auch (6.7) an der Separatrix

$$\frac{d\alpha}{dt}|_{\alpha=0} = 0 \quad (6.9)$$

Gleichung (6.9) impliziert, daß ein Plasmateilchen nicht wie in Bild 6.1 gezeigt, die Separatrix überquert, sondern darauf verweilt. Daher müssen wir die Idealität am Separator verletzen. Dann liefert dort Gleichung (3.8a)

$$0 = \frac{\partial\alpha}{\partial t}|_{\text{Separator}} = -\frac{\partial\psi(\alpha=0, \beta, t)}{\partial\beta} - R^{\beta} \quad (6.10)$$

Dabei wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß die Funktion ψ in (6.10) von der Bogenlängenkoordinate s nicht abhängt. Wäre dies der Fall, so würde ein elektrisches Feld in der ($\beta = \text{const.}$)-Feldfläche parallel zu $\mathbf{B}$ existieren. Ein solches $\mathbf{E}$ führt möglicherweise zu $B \neq 0$ -Rekonnexion (siehe Kapitel 7) und erlaubt, eine Asymmetrie in der Plasmabewegung über die Separatrix zu erzeugen, d.h., daß z.B. $d\alpha/dt$ auf der einen Seite der Separatrix größer ist als auf der anderen. Für die Diskussion von Merging ergibt dies jedoch keine neuen Erkenntnisse, da hier die elektrische Feldkomponente parallel zum Separator hier die wesentliche Rolle spielt. Unter dieser Voraussetzung folgt

$$\frac{d\alpha}{dt}|_{\text{Separatrix}} = -\frac{\partial\psi(\alpha, \beta, t)}{\partial t} \neq 0 \quad (6.11)$$

also überquert das Plasma im idealen Bereich die Separatrix. Aus $B = 0$ am Separator folgt aber

$$\mathbf{E} = \mathbf{R} \quad (6.12)$$

Mit Gleichung (6.10) ergibt sich dann für die Komponente des elektrischen Feldes am Separator parallel zu $\nabla\beta$

$$E_{\parallel \nabla\beta}|_{\text{separator}} = R^\beta \nabla\beta \neq 0 \quad (6.13)$$

In translationsinvarianten Konfigurationen ist es sogar möglich, daß $\nabla\beta$ am Separator parallel zum Separator ist. Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß sich $\nabla\beta$ in allgemeineren Konfigurationen nicht immer so wählen läßt (z.B. in planaren Feldern mit X-Linien, die in der dritten Raumrichtung verschert sind). In jedem Fall besitzt $\nabla\beta$ aber eine Komponente parallel zum Separator, wenn auf dem Separator α auf konstanten Wert geeicht wurde. Daher impliziert (6.13) auch eine elektrische Feldkomponente parallel zum Separator.

Damit ist gezeigt, daß Magnetic Merging erfordert, daß das elektrische Feld am Separator eine Komponente parallel zum Separator besitzt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Der Beweis dieser Tatsache anhand eines Gegenbeispiels soll im folgenden gebracht werden.

Die Diskussion im Kapitel 4 zeigt bereits, daß ein nichtidealer Term, der sich als Gradient schreiben läßt, den Linienervhalt nicht verletzt. Wir wollen jetzt speziell für Konfigurationen mit X-Linien den Fall

$$\mathbf{R} = \nabla P \quad (6.14)$$

untersuchen. Dabei ist offensichtlich auch eine Komponente parallel zum Separator eingeschlossen. Wir beginnen die Untersuchung mit einem einfachen Beispiel. Das Magnetfeld sei eben und translationsinvariant in Bezug auf die z -Richtung. Damit ist es möglich zu wählen:

$$\alpha := A(x, y, t) \quad (6.15a)$$

$$\beta := z \quad (6.15b)$$

Unter der Voraussetzung, daß eine X-Linie existiert, ist die zugehörige Separatrix gegeben durch

$$A(x, y, t) = A_s(t) \quad (6.16)$$

(Da dieses Beispiel hinreichend überschaubar ist, wollen wir keine Eichung spezifizieren, die $A_s(t) = \text{konst.}$ ergibt). Dann wird das Ohm'sche Gesetz (3.1)

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times (\nabla A \times \mathbf{e}_z) = \nabla P \quad (6.17)$$

oder

$$-\frac{\partial A}{\partial t} \mathbf{e}_z + v_z \nabla A - (\mathbf{v} \cdot \nabla A) \mathbf{e}_z = \nabla P + \nabla \phi \quad (6.18)$$

wobei ϕ das elektrische Potential bezeichnet. Die z -Komponente von (6.18) bestimmt die Zeitentwicklung von A :

$$-\frac{dA}{dt} = -\frac{\partial A}{\partial t} - v_x \frac{\partial A}{\partial x} - v_y \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (6.19)$$

und die x - und y -Komponente den Zusammenhang zwischen v_z , A , und P und ϕ :

$$v_z \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (6.20a)$$

$$v_z \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (6.20b)$$

Differentiation von (6.20a) nach y und (6.20b) nach x und anschließende Subtraktion ergibt:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial y} = 0 \quad (6.21)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$v_z = f(A, z) \quad (6.22)$$

Die zugelassene z -Abhängigkeit von v_z stellt eine gewisse Verallgemeinerung des translationsinvarianten Modells dar. Die übliche translationsinvariante Geometrie läßt sich erzielen, indem $\partial/\partial z = 0$ gewählt wird.

Gleichungen (6.22) und (6.20) werden nun benutzt, um einen Zusammenhang zwischen A und P und ϕ herzustellen. Es folgt

$$f(A, z) \nabla A = \nabla_{x,y} (P + \phi) \quad (6.23)$$

(Der Operator $\nabla_{x,y}$ bezeichnet den zweidimensionalen Gradienten)

Gleichung (6.23) bestimmt P und ϕ zu

$$P + \phi = \int^A f(A', z) dA' + h(z) \quad (6.24)$$

Einsetzen in Gleichung (6.19) legt dann die totale Zeitentwicklung von A fest:

$$-\frac{dA}{dt} = \frac{\partial F}{\partial z}(A, z) + \frac{\partial h}{\partial z} \quad (6.25)$$

wobei

$$F = \int^A f(A', z) dA'$$

gewählt wurde. Offenbar ist die rechte Seite von (6.25) konstant auf Flächen konstanten A 's, also auch auf Feldlinien. Aufgrund der X-Struktur ist der Wert von A auf der Separatrixfläche derselbe wie auf dem Separator. Damit folgt, daß die Änderung dieses Wertes für die Separatrix gegeben ist durch die partielle Ableitung $\partial A / \partial t$ am Separator. Am Separator ist

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dA_s}{dt} \quad (6.26)$$

Die Funktionen F und h bestimmen die Änderung des A -Wertes des Plasmas. Da die rechte Seite von (6.25) konstant auf Feldlinien ist, ist damit die Änderung des A -Wertes des Plasmas auf der Separatrix dieselbe wie die des Plasmas am Separator. Wegen (6.26) kann das Plasma offenbar die Separatrix nicht überqueren. Also findet hier kein Merging statt. Hier liegt kein Widerspruch zur Theorie des stationären Mergings, wie man zunächst vermuten könnte, denn in diesem Fall ist am Separator

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (6.27)$$

und damit gilt dies auch auf der Separatrix. Wenn R^z die z -Komponente von $\mathbf{R}$ ist, so erfordert stationäres Merging offenbar

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + R^z \right) |_{\text{Separator}} = 0 \quad (6.28)$$

und

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} |_{\text{Separatrix}} \neq 0 \quad (6.29)$$

($R^2 = 0$ auf der Separatrix außerhalb des nichtidealen Gebietes D_R). Mit Gleichungen (6.20) und $\nabla_{x,y} A = 0$ am Separator sieht man sofort, daß $\mathbf{R}$ kein Gradient sein kann.

Eine Nichtidealität, die sich von einem Gradienten herleitet, kann trotzdem ein elektrisches Feld am Separator implizieren. Die Sonnerup'sche Definition magnetischer Rekonnexion benutzt als Kriterium explizit das elektrische Feld am Separator (vgl. Kapitel 1). Die hier vorgeführte Analyse zeigt, daß diese Definition in der vorliegenden Form nicht haltbar ist.

Im Weiteren soll eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses kurz angesprochen werden. Ein $\mathbf{R}$, welches sich als Gradient schreiben läßt, wird in α, β, s - Koordinaten:

$$\mathbf{R} = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \nabla \alpha + \frac{\partial P}{\partial \beta} \nabla \beta + \frac{\partial P}{\partial s} \nabla s \quad (6.30)$$

An dem Separator können formale Divergenzen speziell des Terms $\partial P / \partial \alpha$ auftreten, da dort $\nabla \alpha$ verschwindet oder parallel $\nabla \beta$ ist (ohne Einschränkung seien α und β entsprechend gewählt). Diese Divergenzen sind ganz offensichtlich lokalisiert am Separator, so daß in jeder beliebig kleinen Umgebung derselben die α, β, s -Koordinatendarstellung wohldefiniert ist. Die Ursache der Divergenzen ist eine mathematische, nämlich die Wahl der Koordinatendarstellung. Daher sind auch keine physikalischen Nicht-analytizitäten impliziert.

Weil in Abschnitt 6.3 detaillierter auf das Verhalten der Koordinaten α, β und s in der Umgebung von Neutralpunkten eingegangen wird, wollen wir hier darauf verzichten. In jeder noch so kleinen Umgebung des Separators können bereits die Ergebnisse aus Kapitel 3 angewandt werden. Daher wird mit (3.8c)

$$-\frac{\partial \psi}{\partial s} = R^s = \frac{\partial P}{\partial s} \quad (6.31)$$

Damit folgt

$$\psi = -P + \hat{\psi}(\alpha, \beta, t) \quad (6.32)$$

wobei $\hat{\psi}$ eine beliebige Funktion von α und β ist. Also ist die Dynamik von α und β durch $\hat{\psi}$ allein bestimmt und damit sowohl nichtsingulär als auch fluß- und linienerhaltend.

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß Merging bei Magnetfeldern, die Neutrallinien mit X-Struktur aufweisen, charakterisiert ist durch eine elektrische Feldkomponente parallel zur Neutrallinie

(dem Separator) und einem nichtidealen Term $\mathbf{R}$, dessen Rotation nichtverschwindend ist. Das elektrische Feld am Separator ist gegeben durch die Nichtidealität $\mathbf{R}$, da $\mathbf{B}$ dort verschwindet.

Über die Größe von R^β ist, wie aus Gleichungen (6.10) und (6.11) folgt, die Differenz zwischen der Zeitentwicklung des α - Wertes der Separatrix und dem des Plasmas festgelegt, und damit letztlich auch die Plasmamenge, die über die Separatrix transportiert wird. Damit folgt aus der einfachen Tatsache, daß diese Differenz um so größer wird, je größer R^β und damit das elektrische Feld wird, die Richtigkeit von *Vasyliunas'* [1975] Aussage, daß die Stärke des elektrischen Feldes am Separator ein Maß für die Rekonnexionsrate, also den Plasmafluß über die Separatrix, ist.

Bis hierhin wurden Magnetfeld-Plasma Konfigurationen untersucht, die bereits eine X-Linien Struktur aufweisen. Die Analyse gilt dabei gleichermaßen für stationäres Merging, wo Zeitabhängigkeiten verschwinden, als auch für dynamische Evolution.

Zur Vervollständigung der Untersuchung der Neutrallinienrekonnexion ist eine Diskussion der Neutrallinienbildung, wie sie z.B. in der Tearing-Instabilität wichtig ist, erforderlich. Der Einsatz von Rekonnexion durch Neutrallinienbildung wird zunächst in einem einfachen Modell und später allgemein beschrieben. Als erster Schritt soll im folgenden ein sehr einfaches idealisiertes Modell für dynamische X-Punkt Bildung, also für Tearing [z.B. *Furth et al.*, 1963; *Schindler*, 1974] vorgeführt werden. Wie, abgesehen von relativ wenigen Beispielen [*Galeev et al.*, 1985] in der Literatur diskutiert, wollen auch wir zur Illustration ein zweidimensionales Modell verwenden. Dazu wählen wir α und β wie in (6.15). Dabei sei $A(x, y, t)$

$$A := \frac{1}{2}y^2 + t \sin \frac{\pi}{2}x \quad (6.33)$$

Wir betrachten den Übergang $t = 0 \rightarrow t > 0$. Zur Zeit $t = 0$ ist das Feld eine eindimensionale Neutralschicht, d.h.

$$\mathbf{B}(x, y = 0, z) = 0 \quad (6.34)$$

für $t = \epsilon > 0$ existiert periodisch ein X-Punkt bei $x = 4n - 3, n = 1, 2, 3, \dots$ und ein O- Punkt bei

$x = 4n - 1$. Eine solche Topologieänderung kann nicht linienerhaltend sein. Nach Konstruktion gilt

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \sin \frac{\pi}{2} x \quad (6.35)$$

Wäre eine linienerhaltende Plasmaströmung möglich, so müßte mit (3.12)

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = f(\alpha, \beta, t) \quad (6.36)$$

sein. Für $t = 0$ und $\alpha = 0$ ist jedoch

$$\nabla \alpha|_{\alpha=0}(t=0) = 0 \quad (6.37)$$

und damit

$$\frac{d\alpha}{dt}(\alpha = t = 0) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(\alpha = t = 0) = \sin \frac{\pi}{2} x \quad (6.38)$$

Offensichtlich ist die Linienerhaltung verletzt. Diese Linienerhaltsverletzung ist singulär, d.h., für $\alpha(t \neq 0) \neq 0$ kann die Strömung sehr wohl linienerhaltend sein, denn mit:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \alpha = -\sin \frac{\pi}{2} x \quad (6.38)$$

oder

$$v_y = -\frac{1}{y} \sin \frac{\pi}{2} x \quad (6.39)$$

ist die Strömung für alle $y \neq 0$ linienerhaltend, da dann $d\alpha/dt = 0$ gilt. Dieses Strömungsfeld läßt sich jedoch offensichtlich nicht bis $y = 0$ fortsetzen.

An dieser Stelle taucht zum ersten Mal das Problem des unstetigen (singulären) Verhaltens der Bogenlängenkoordinate s auf, denn

$$\mathbf{B} \cdot \nabla s = |\mathbf{B}| \quad (6.40)$$

hat hier die Lösung

$$s = \begin{cases} x & y > 0 \\ -x & y < 0 \end{cases} \quad (6.41)$$

so daß s in der kritischen Ebene nicht definiert ist. Dennoch läßt sich die obige Analyse in α, β und s -Koordinaten verstehen, wenn man einen geeigneten Grenzübergang durchführt, etwa $y \rightarrow 0, y > 0$.

In dieser Situation läßt sich in Gleichungen (6.38) und (6.39) x durch s ersetzen.

Für zweidimensionales Tearing in Magnetfeldkonfigurationen mit nichtverschwindendem B-Feld ist die Analyse im Prinzip analog. Der Einsatz von Rekonnexion ist nämlich verbunden mit der Formation eines Neutralpunktes in Form einer "Cusp" (Bild 6.2).

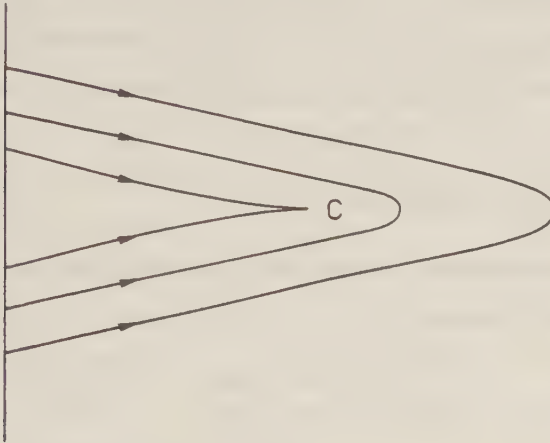


Bild 6.2 Einsatz von Rekonnexion (Tearing). An der Cusp c hat sich ein Neutralpunkt gebildet.

In der Umgebung dieses Punktes wird das Magnetfeld in geeigneten Koordinaten (die Cusp liege im Ursprung des Koordinatensystems).

$$\mathbf{B} = k_1 y, \mathbf{e}_x + O(x^2) \mathbf{e}_y; \quad k_1 > 0 \quad (6.42)$$

Damit wird die Flußfunktion A in der Umgebung der Cusp

$$A = \frac{1}{2} k_1 y^2 + O(x^3) \quad (6.43)$$

Hinreichend nahe der Cusp ist $O(x^3)$ vernachlässigbar gegen Störungen von $O(x)$, wo daß im Prinzip wieder dieselbe Situation vorliegt wie für Tearing in Neutralschichten.

In einer allgemeinen nicht notwendigerweise zweidimensionalen Feldstruktur kann die Bildung eines Neutralpunktes auch ein idealer Prozess sein. Dieses zeigen wir wie folgt: Sei $\mathbf{B} \neq 0$ und $\mathbf{B} = \nabla \alpha \times \nabla \beta$.

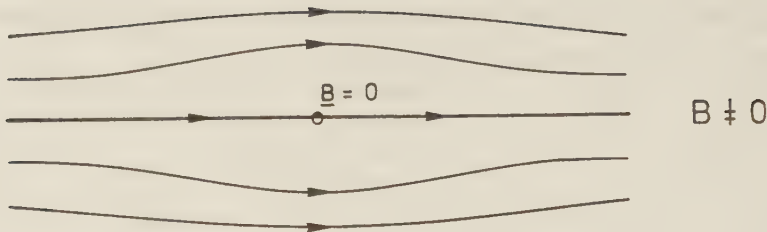


Bild 6.3 Beispiel für die Bildung eines Neutralpunktes

Wir wählen eine spezielle Dynamik für α und β durch die Forderung $\psi(\alpha, \beta, t) \equiv 0$ und $\partial\beta/\partial t = 0$.

Damit reduziert sich (3.12) auf

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\alpha = 0 \quad (6.44a)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\beta = 0 \quad (6.44b)$$

Das elektrische Feld sei gegeben durch

$$\mathbf{E} = [\mathbf{r} \cdot \nabla\alpha(\mathbf{r} = 0, t = 0) + O(r^2)]\nabla\beta \quad (6.45)$$

Offensichtlich ist $\mathbf{E}$ ein ideales elektrisches Feld. Unter Zuhilfenahme von (2.45) ergibt sich für $\partial\alpha/\partial t$:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\mathbf{r} \cdot \nabla\alpha(\mathbf{r} = 0, t = 0) + O(r^2) \quad (6.46)$$

Nach Konstruktion verschwindet $\nabla\alpha$ an der Stelle $\mathbf{r} = 0$ zur Zeit $t = 1$. Das elektrische Feld (6.45) an der Stelle $\mathbf{r} = 0$ verschwindet jedoch ebenfalls, so daß der Neutralpunkt offensichtlich ideal entstanden ist. Hierbei wurde natürlich vorausgesetzt, daß sich nur am Ort $\mathbf{r} = 0$ ein Neutralpunkt bildet, denn die Bildung eines Neutralpunktes an einem anderen Ort, wo $\mathbf{E}$ nicht verschwindet, kann kein idealer Prozess sein. Ein auf dieser Weise entstandener Neutralpunkt liegt stets genau auf einer Feldlinie, d.h., die Feldlinie endet und beginnt dort (Bild 6.3).

Die Richtigkeit dieser Aussage ist leicht einzusehen. Die Evolution von α und β , wie von dem Plasma gesehen, unterliegt der idealen Magnetohydrodynamik und damit Gleichungen (3.8). Damit haben die Höhenwerte α_0 und β_0 des Neutralpunktes zur Zeit t_1 Urbilder α'_0 und β'_0 zur Zeit $t_1 - \delta t$. Zu dieser Zeit war jedoch $\mathbf{B}$ nichtverschwindend. Daher bezeichnen die Werte $\alpha(t_1 - \delta t) = \alpha'_0$ und $\beta(t_1 - \delta t) = \beta'_0$ genau eine Feldlinie. Diese Feldlinie hat aufgrund der Eineindeutigkeit der durch die kanonischen Gleichungen (3.12) gegebenen Abbildungen genau ein Bild zur Zeit t . Auf dieser Bildlinie liegt auch der Neutralpunkt. Da die Feldrichtung eine stetige Funktion von α und β sein muß, hat das Magnetfeld auf dieser Linie dieselbe Richtung wie auf den benachbarten, kann sich also nicht umkehren. Daher beginnt und endet genau eine Feldlinie im Neutralpunkt.

Eine ideale Neutralpunktbildung stellt einen Sonderfall dar, in dem das Magnetfeld seine Topologie ändert, ohne daß diese Änderung physikalisch als magnetische Rekonnexion zu verstehen ist. Im Sinne der allgemeinen Definition allgemeiner magnetischer Rekonnexion (Kapitel 5) ist eine ideale Neutrallinienbildung auch keine Rekonnexion, da hier das Gebiet D_R beliebig klein gewählt werden kann, es also ein δ , wie in der Definition gefordert, nicht geben kann.

Natürlich ist für die Korrektheit der obigen Argumentation von wesentlicher Bedeutung, daß die Plasmabewegung ideal war. Im nichtidealen Falle könnten sich möglicherweise andere Situationen ergeben.

Eine ähnliche Behandlung wie die hier für X-Linien vorgeführte ist auch möglich im Falle von isolierten magnetischen Neutralpunkten vom Sattel-Typ (vgl. Kapitel 2). Obwohl magnetische Sattelpunkte aus topologischen Gründen an der Separatrix, die das irdische, dipolartige Magnetfeld von dem interplanetaren Magnetfeld trennt, existieren können (vgl. Abschnitt 6.4), so ist ihre Bedeutung für magnetische Rekonnexion zweifelhaft. Statt dessen wird in der Diskussion magnetischer Rekonnexion in Feldgebieten ohne Nullstellen von $\mathbf{B}$ (Kapitel 7) klar, daß Rekonnexion keinesfalls singuläre Punkte des Magnetfeldes involvieren muß.

Weil weiterhin im wesentlichen alle klassischen Rekonnexionsmodelle in der Literatur [z.B. *Sonnerup*, 1970; *Yeh und Azford*, 1970; *Vasyliunas*, 1975; *Ugai*, 1981; *Priest und Forbes*, 1986] keine isolierten

magnetischen Neutralpunkte benötigten, scheinen isolierte Neutralpunkte für magnetische Rekonnexion, abgesehen von wenigen Sonderfällen, keine große physikalische Bedeutung zu haben.

Die Relevanz von Merging ist damit in den Fällen gezeigt, wo das Magnetfeld Singularitäten besitzt, an denen Rekonnexion stattfindet. Im Vorgriff auf die Untersuchung zur Bedeutung von Rekonnexion in nichtsingulären Magnetfeldern in Kapitel 7 soll Merging an Neutralpunkten und Neutrallinien $B=0$ -Rekonnexion genannt werden.

6.3. Singularitäten der Euler-Potentialdarstellung

Wie in den vorhergehenden Abschnitten schon erwähnt, können in der Euler-Potentialdarstellung Singularitäten auftreten, wenn $\mathbf{B}$ verschwindet. Obwohl diese Singularitäten das Resultat der speziellen Wahl der Koordinaten α , β und s sind und damit keinesfalls Singularitäten der physikalischen Größen implizieren, soll in diesem Abschnitt der Vollständigkeit halber auf die Eigenschaften der α , β und s Koordinatendarstellung an magnetischen Neutralpunkten eingegangen werden. Die wesentlichen Singularitäten des Magnetfeldes sind solche, wo die lineare Entwicklung von $\mathbf{B}$ in der Nähe des Neutralpunktes nicht verschwindet, also

$$\mathbf{B} = (\nabla \mathbf{B})_0 \cdot \mathbf{r} \quad (6.47)$$

in einer Umgebung des Neutralpunktes gilt. Dabei hat das Magnetfeld lokal verschiedene Strukturen, wie z.B. von *Fukao* [1975] untersucht. Benutzen wir Satz 2 aus Kapitel 5, so läßt sich aus diesen Strukturen sofort eine wesentliche Klasse von topologisch äquivalenten Feldern isolieren. Mit diesem Satz folgt, daß, falls $(\nabla \mathbf{B})_0$ keine verschwindenden Eigenwerte hat, das Magnetfeld in der Umgebung stets dem Standardsattel topologisch äquivalent ist, nämlich

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r} \quad (6.48)$$

Derartige Sattelfelder werden in der jüngsten Literatur erwähnt [*Greene*, 1987]. Falls $(\nabla \mathbf{B})$ einen verschwindenden Eigenwert hat, so folgt die lokale Topologie aus der höheren Ordnung der Entwicklung von $\mathbf{B}$ um den Aufpunkt. Ein typisches Beispiel hierfür ist die im letzten Kapitel diskutierte Cusp.

In dieser Arbeit soll jedoch angenommen werden, daß ein Neutralpunkt, wo $(\nabla \mathbf{B}_0)$ einen verschwindenden Eigenwert hat, Teil einer Neutrallinie ist. Diese Auswahl ist nahegelegt durch die physikalisch relevanteren Konfigurationen (X- und O-Linien). Singularitäten höherer Ordnung werden in der Katakstrophentheorie [*Wassermann*, 1974, *Bröcker*, 1975] untersucht.

Im Sinne dieser physikalisch motivierten Auswahl erhalten wir die X-Linien und die O-Linien als generische Fälle von Neutrallinien und den Standardsattel als typischen Repräsentanten von isolierten

Neutralpunkten. Im folgenden sollen um Eigenschaften der Euler-Potentiale und der Bogenlänge s in den drei Fällen untersucht werden.

Der einfachste Fall ist der der O-Linie. An jedem Ort dieser Linie hat (∇B_0) zwei konjugierte rein imaginäre Eigenwerte. Daher besteht das Magnetfeld in der Umgebung der Neutrallinie aus geschlossenen, ellipsenförmigen Feldlinien, die jeweils in Ebenen senkrecht zur neutralen Linie liegen. Diese Ellipsen sind topologisch Kreisen äquivalent, so daß wir die Diskussion auf den Repräsentanten dieser Feldkategorie beschränken können, der kreisförmige Feldlinien besitzt. Dessen Magnetfeld läßt sich lokal beschreiben durch

$$\alpha = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (6.49a)$$

$$\beta = z \quad (6.49b)$$

wobei sich, wie in Kapitel 2 gezeigt, $\nabla\beta$ entlang der Neutrallinie festsetzen läßt. Aus $\mathbf{B} \cdot \nabla s = |\mathbf{B}|$ folgt für die Koordinate s :

$$s = \arctan \frac{y}{x} = \varphi \quad (6.50)$$

Offenbar sind α , β und s hier Funktionen der Zylinderkoordinaten, $\alpha = \frac{1}{2}r^2$, mit den bei Zylinderkoordinaten nötigen Einschränkungen, daß im Ursprung Gradienten von s und φ nicht definiert sind und daß $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ zusammenfallen. Damit entspricht in dieser Topologie die Euler-Potentialbehandlung in der Nähe des Neutralpunktes der Zylinderkoordinatendarstellung, die unproblematisch ist.

Komplizierter wird die Situation bei einer X-Linie. Auch hier ist es zweckmäßig, die topologische Äquivalenz auszunutzen und einen symmetrischen Repräsentanten zu wählen. Sei also lokal

$$\alpha = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) \quad (6.51a)$$

$$\beta = z \quad (6.51b)$$

Zuerst ist hier festzustellen, daß aufgrund der lokalen Struktur durch die Festlegung eines α und s Wertes im Ortsraum für festes β zwei Punkte festgelegt, also offenbar die Koordinatentransformation nicht eindeutig ist (Bild 6.4).

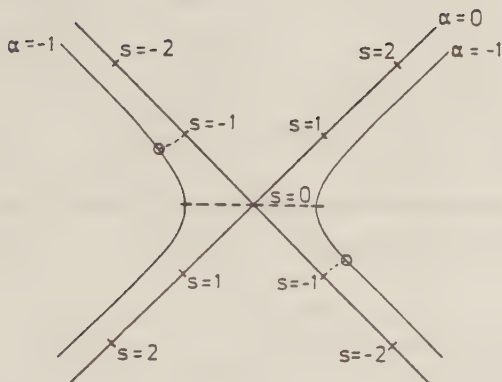


Bild 6.4 Vorgabe von s und α fixiert zwei Punkte im Ortsraum bei X-Linien Struktur z.B. für $s = -1, \alpha = -1$

Durch Bild 6.4 ist es anschaulich klar, daß s am Ursprung, d.h. auf der X-Linie selbst, nicht differenzierter sein kann. Die Berechnung der lokalen Form von s ist etwas aufwendiger. Für symmetrische X-Linienkonfiguration ist lokal $|\mathbf{B}| = r$. Damit folgt aus $\mathbf{B} \cdot \nabla s = |\mathbf{B}|$:

$$\frac{y}{r} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{x}{r} \frac{\partial s}{\partial y} = 1 \quad (6.52)$$

In Polarkoordinaten wird dies zu

$$\sin \varphi \frac{\partial s}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial s}{\partial y} = 1$$

oder

$$\sin 2\varphi \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{\cos 2\varphi}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} = 1 \quad (6.53)$$

Die homogene Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$s_h = g(r^2 \cos 2\varphi) \quad (6.54)$$

wo g eine beliebige, differentierbare Funktion ist. Für eine Lösung des inhomogenen Problems liegt der

Ansatz

$$s = r\hat{s}(y) \quad (6.55)$$

nahe. Es folgt

$$\sin 2y\hat{s}(\varphi) + \cos 2y\hat{s}'(\varphi) = 1 \quad (6.56)$$

wobei "''" Differentiation nach φ bezeichnet. Gleichung (6.56) hat singuläre Koeffizienten. Die homogene Form von Gleichung (6.56) hat die Lösung

$$\hat{s}_0(\varphi) = k\sqrt{|\cos 2\varphi|}; \quad k \neq 0 \quad (6.57)$$

Diese Lösung ist offenbar innerhalb eines durch die Separatrix abgetrennten Quadranten differenzierbar. Daher gilt die weitere Rechnung nur jeweils innerhalb eines Quadranten. Die homogene Gleichung (6.56) wird gelöst durch die Methode der Variation der Konstanten. Für $k = k(y)$ erhält man

$$\cos 2\varphi K' \hat{s}_0(\varphi) = 1 \quad (6.58)$$

oder

$$K = \int^{\varphi} \frac{d\varphi'}{(\cos^2 \varphi')^{\frac{3}{2}}} \quad (6.59)$$

Zusammen ergibt sich als Lösung für s auf dem Intervall $s - \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$

$$s = s_I(r, \varphi) = r\sqrt{\cos 2\varphi} \int^{\varphi} \frac{d\varphi'}{(\cos 2\varphi')^{\frac{3}{2}}} + g(r^2 \cos 2\varphi) \quad (6.60)$$

Um diese Lösung fortzusetzen, muß ihr Verhalten bei $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ untersucht werden. Dazu verwenden wir die Regel von de l' Hospital

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4}} s_I(r, \varphi) &= r \lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\int^{\varphi} \frac{d\varphi'}{(\cos 2\varphi')^{\frac{3}{2}}} + g(0)}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + g(0) \\ &= r \lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}} + g'(0)}{\frac{\sin 2\varphi}{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}} + g(0) \\ &= r + g(0) \end{aligned} \quad (6.61)$$

Entsprechend folgt:

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{4}} s_I(r, \varphi) = -r + g(0) \quad (6.62)$$

Damit läßt sich s_I hier stetig fortsetzen. Damit erhält man für s in einer ganzen Umgebung um den X-Punkt

$$s(r, \varphi) = g(r^2 \cos 2\varphi) + r \begin{cases} s_I(r, \varphi) & ; -\pi/4 < \varphi < \pi/4 \\ -s_I(r, \varphi - \pi/4) & ; \pi/4 < \varphi < 3\pi/4 \\ s_I(r, \varphi - 3\pi/4) & ; 3\pi/4 < \varphi < 5\pi/4 \\ -s_I(r, \varphi - 5\pi/4) & ; 5\pi/4 < \varphi < 7\pi/4 \\ 1 & ; \varphi = \pi/4, \varphi = 5\pi/4 \\ -1 & ; \varphi = 3\pi/4, \varphi = 7\pi/4 \end{cases} \quad (6.63)$$

Also ist gezeigt, daß lokal im Fall einer X-Linienstruktur stetige Funktionen α , β und s existieren. Offensichtlich sind die hier auftretenden Singularitäten verwandt mit denen der Zylinderkoordinaten, die im Fall der O-Linie benutzt wurden.

Der letzte Schritt ist die Bestimmung der α , β , s - Darstellung des Standardsattels. Auch hier soll der Standardsattel für alle anderen, topologisch äquivalenten Sättel stehen. In Kapitel 2 wurde schon gezeigt, daß sich für

$$\mathbf{B} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y - 2z\mathbf{e}_z \quad (6.64)$$

Euler-Potentiale angeben lassen als

$$\alpha = z(x^2 + y^2) \quad (6.65a)$$

$$\beta = \phi \quad (6.65b)$$

Die hier (bei α und β) auftretenden Singularitäten sind wieder genau die der Polarkoordinatendarstellung.

Die Koordinate s ist schwieriger zu analysieren. Sie erfüllt

$$x \frac{\partial s}{\partial x} + y \frac{\partial s}{\partial y} - 2z \frac{\partial s}{\partial z} = \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} \quad (6.66)$$

Unter Ausnutzen der Symmetrie kann $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ gesetzt werden, so daß aus (6.66) folgt:

$$r \frac{\partial s}{\partial r} - 2z \frac{\partial s}{\partial z} = \sqrt{r^2 + 4z^2} \quad (6.67)$$

Durch Inspektion sieht man nun, daß wenn $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ die Radiuskoordinate der sphärischen Polarkoordinaten ist, für s in den Grenzfällen $z = 0$ bzw. $r = 0$ gelten muß:

$$s(z = 0) = R \quad (6.68a)$$

$$s(r = 0) = -R \quad (6.68b)$$

Die Existenz eines beschränkten s zeigen wir mit Hilfe einer Reihenentwicklung. Die rechte Seite von (6.67) läßt sich schreiben als

$$(r^2 + 4z^2)^{\frac{1}{2}} = r(1 + 4\frac{z^2}{r^2})^{\frac{1}{2}} \quad (6.69)$$

Die Wurzel auf der rechten Seite von (6.69) läßt sich unter der Voraussetzung $4z^2/r^2 \leq 1$ entwickeln [z.B. Bronstein und Semendjajew, 1977]. Allgemein gilt:

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (m-k); \quad |x| \leq 1 \quad (6.70)$$

Angewandt auf (6.69) folgt

$$r(1 + 4\frac{z^2}{r^2})^{\frac{1}{2}} = r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} \frac{\xi_n}{r^{2n-1}} \quad (6.71)$$

mit

$$\xi_n = 4^n \prod_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - k) \quad (6.72)$$

Als Ansatz für s ist daher naheliegend:

$$s(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} s_n(r) \quad (6.73)$$

Einsetzen in (6.67) bestimmt $s_n(r)$:

$$r \frac{ds_n}{dr} - 4ns_n = \frac{\xi_n}{r^{2n-1}} \quad (6.74)$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$s_n = -\frac{\xi_n}{6n-1} \frac{1}{r^{2n-1}} \quad (6.75)$$

und damit

$$s = r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{(6n-1)n!} \frac{z^{2n}}{r^{2n-1}} \quad (6.76)$$

Da gilt

$$\frac{z^{2n}}{n!} \frac{\xi_n}{r^{2n-1}} > \frac{z^{2n}}{(6n-1)n!} \frac{\xi_n}{r^{2n-1}}; \quad n \geq 1 \quad (6.77)$$

wird das Negative der Summe in (6.76) von der Summe in (6.71) majorisiert, die konvergiert. Daher konvergiert (6.76) auch. Für $r^2 < 4z^2$ läßt sich auch ähnliche Weise die Existenz von beschränktem s

zeigen; man entwickelt dann nicht nach $4z^2/r^2$ sondern nach $r^2/4z^2$. Mit (6.76) folgt zudem $s(z=0) = r = R(z=0)$ wie erwartet und mit der Entwicklung nach r^2 , daß $s(r=0) = -R = -|z|$ gilt. Da beide Entwicklungen für $r^2 = 4z^2$ übereinstimmen, ist die Stetigkeit von s gezeigt.

Wir konnten also in allen relevanten Fällen von Singularitäten des Magnetfeldes die lokale Existenz von Euler-Potentialen α und β und einer Bogenlängenfunktion s nachweisen, die als Funktion des Ortes bei X-Punkten sogar stetig sind. Die auftretenden Singularitäten in der Darstellung des nichtidealen Terms R aus Gleichung (6.30) sind daher allein der Koordinatenwahl zuzuschreiben und haben deshalb keine physikalischen Konsequenzen.

Als letztes in diesem Abschnitt ist noch das Verhalten der Euler-Potentiale an einer X-Linie zu untersuchen, wenn $\partial B/\partial t$ eine Komponente parallel zur X-Linie besitzt. In dieser Situation verschwindet die Liniensingularität des Magnetfeldes, welches somit seine topologische Struktur verändert. Da die Euler-Potentiale die Struktur des Magnetfeldes bestimmen, ist zu erwarten, daß der Übergang von singulärem zu nichtsingulärem B die Euler-Potentiale wesentlich verändert. In der Euler-Potentialdarstellung ist $\partial B/\partial t$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \times \nabla \beta + \nabla \alpha \times \nabla \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (6.78)$$

Wie im Abschnitt 6.2 gezeigt, lassen sich in einer Umgebung eines Punktes der X-Linie Euler-Potentiale so wählen, daß sich eine lokale Parametrisierung (6.2) der X-Linie durch die Werte von β ergibt. Mit dieser Wahl folgt

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nabla \beta = \nabla \alpha \times \nabla \frac{\partial \beta}{\partial t} \cdot \nabla \beta \quad (6.79)$$

$$= -\mathbf{B} \cdot \nabla \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (6.80)$$

Falls an der Neutrallinie die linke Seite von (6.80) nicht verschwindet, so folgt

$$|\nabla \frac{\partial \beta}{\partial t}| \sim \frac{1}{|\mathbf{B}|} \quad (6.81)$$

in der Nähe der Neutrallinie. Daher ist zu erwarten, daß für solche Zeitentwicklungen am Separator $\partial \beta/\partial t$ divergiert. Dieses manifestiert sich auch in den dynamischen Gleichungen (3.8), wie im folgenden

gezeigt wird. Mit dem Ohm'schen Gesetz (3.1) und dem Faraday'schen Induktionsgesetz folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{R} + \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (6.82)$$

Am Separator wird daraus

$$\left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_{\text{Separator}} = -\nabla \times \mathbf{R} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (6.83)$$

Weil nach Wahl von α und β am Separator $\nabla \alpha$ entweder verschwindet oder parallel zu $\nabla \beta$ ist, folgt, daß am Separator $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \perp \nabla \beta$. Daher erfordert (6.78) in der Nähe des Separators

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \nabla \beta \approx -(\nabla \times \mathbf{R}) \cdot \nabla \beta \neq 0 \quad (6.84)$$

Mit Gleichung (3.23) folgt

$$(\nabla \times \mathbf{R}) \cdot \nabla \beta = \left(\frac{\partial R^\alpha}{\partial s} - \frac{\partial R^s}{\partial \alpha} \right) |\mathbf{B}| \quad (6.85)$$

Wegen (3.8) gilt:

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + R^\alpha = - \int ds \left(\frac{\partial R^s}{\partial \alpha} - \frac{\partial R^\alpha}{\partial s} \right) + f(\alpha, \beta) \quad (6.86)$$

wobei $f(\alpha, \beta)$ eine Integrationskonstante der s -Integration ist. In der Nähe des Separators erhält man mit (6.85) und (6.86)

$$\frac{d\beta}{dt} \approx - \int ds \frac{1}{B} (\nabla \times \mathbf{R}) \cdot \nabla \beta \quad (6.87)$$

Da $\mathbf{v} \cdot \nabla \beta$ regulär sein muß ($\nabla \beta$ ist endlich und $\mathbf{v}$ eine physikalische Größe) ist $\partial \beta / \partial t$ am Separator singulär, und zwar

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} \sim \ln r \quad (6.88)$$

wie man sieht, wenn man sich dem Separator auf einer Separatrixlinie nähert. Diese Singularität ist das Resultat einer Änderung der Feldtopologie. Während ein Magnetfeld mit Neutrallinie (und auch mit Neutralpunkten) die Definition einer Separatrix erlaubt (vgl. Kapitel 5), so ist dies nach jeder noch so kleinen Zeit nicht mehr möglich, wenn (6.78) gilt. Mit Satz 3 aus Kapitel 5 folgt, daß in dem resultierenden Feld (nach dem "Einschalten" von $\partial \mathbf{B} / \partial t \parallel \nabla \beta$) die Topologie aller Feldlinien zumindest lokal gleich wird, weil $\mathbf{B}$ nichtsingulär geworden ist.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir globale topologische Konzepte, die Neutrallinien und Sattelpunkte des Magnetfeldes beinhalten, diskutieren.

6.4. Globale topologische Struktur von Magnetfeldern mit Neutralpunkten und Anwendung auf die Magnetosphäre

Die ersten topologischen Modelle der Erdmagnetosphäre benutzen Neutrallinien dazu, Feldlinien verschiedener Art voneinander zu trennen. Die Art einer Feldlinie ist hier zu verstehen im Sinne einer naiven Topologie, die unterscheidet, ob eine Feldlinie eine Dipolfeldlinie ist, d.h., an zwei Stellen die Erdoberfläche schneidet, oder, ob sie die Erdoberfläche nur einmal oder zweimal schneidet. (Bild 6.5)

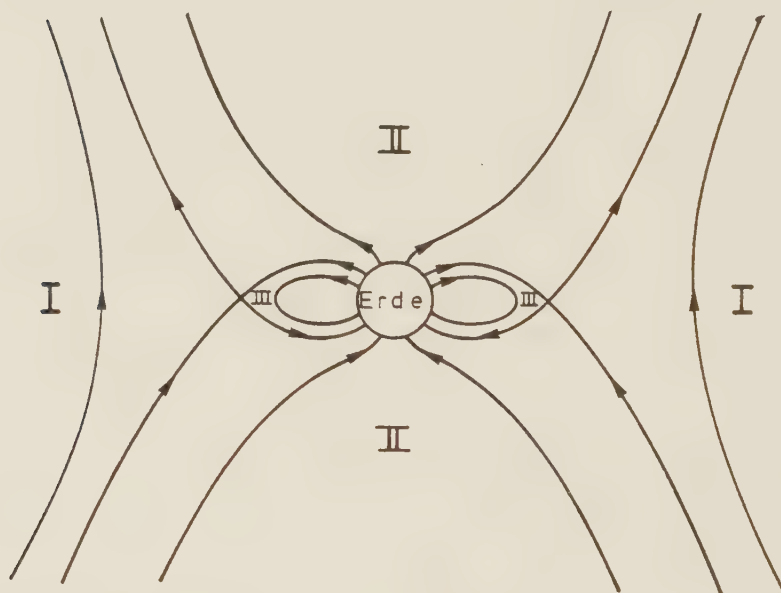


Bild 6.5 Illustration der naiven Topologie, wie z.B. von *Vasyliunas* [1975] benutzt. Die Separatrizen sind stärker gezeichnet. Die römischen Zahlen bezeichnen jeweils Gebiete verschiedener Topologie

Diese Situation ist jedoch topologisch hochgradig instabil. Eine Überlagerung eines beliebig kleinen toroidalen Magnetfeldes B_φ zerstört nämlich die Neutrallinieneigenschaft und damit lokal die Auszeich-

nung eines Separators. Global besteht jedoch immer noch die Möglichkeit, Feldlinien aufgrund ihrer "naiven" Topologie zu klassifizieren. Es ist vorstellbar, daß es in einer solchen Konfiguration noch eine Fläche gibt, die Feldlinien verschiedener Topologie trennt und die man daher Separatrix im *Vasyliunas'schen* [1975] Sinne nennen könnte. Dieser Möglichkeit wird man jedoch verlustig, sobald das System leicht gestört wird, etwa durch ein Störfeld $\delta \mathbf{B}$.

Störungen führen in Systemen wie diesem, welches einem Torus äquivalent ist, typischerweise zum Aufbrechen magnetischer Flußflächen [z.B. *Rosenbluth, Sagdeev und Taylor*, 1966; *Morozov und Pogutse*, 1981]. Dabei ist der Zerstörungseffekt an der Separatrix am größten. Es läßt sich daher der Schluß ziehen, daß das Neutrallinienmodell offenbar wenig geeignet ist, eine stabile Separatrix zur Trennung von interplanetarem Fluß, Fluß der halb mit der Erde verbunden ist und Dipolfeldlinien zu schaffen.

Obwohl es fraglich erscheint, insbesondere im Hinblick auf die Diskussion von $B \neq 0$ -Rekonnexion in Kapitel 7, ob eine Definition einer Feldfläche mit obigen Eigenschaften überhaupt sinnvoll und nötig ist, so wollen wir dennoch zur Erläuterung der konventionellen topologischen Vorstellungen ein Konzept der neueren Literatur [Greene, 1987] mit einem der ersten topologischen Strukturmodelle der Magnetosphäre [Dungey, 1963] verbinden.

Dazu betrachten wir einen Dipol der Stärke m , dessen Achse parallel zur z -Achse ausgerichtet sei, in einem homogenen Magnetfeld, welches gegen die z -Achse geneigt sei und das interplanetare Magnetfeld symbolisieren soll. Das Dipolfeld stellt sich in kartesischen Koordinaten dar als

$$\mathbf{B}_D = \frac{m}{r^3} \left\{ \frac{3}{r^2} xz \mathbf{e}_x + \frac{3}{r^2} xy \mathbf{e}_y + \left(\frac{3}{r^2} z^2 - 1 \right) \mathbf{e}_z \right\}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.89)$$

und das überlagerte konstante Feld

$$\mathbf{B}_{IMF} = a \mathbf{e}_y + b \mathbf{e}_z \quad (6.90)$$

wobei ohne Einschränkung die x -Komponente von $\mathbf{B}_{IMF}$ zu Null gewählt wurde. Wir suchen Neutralpunkte des Feldes $\mathbf{B} = \mathbf{B}_D + \mathbf{B}_{IMF}$:

$$B_x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad xz = 0 \quad (6.91a)$$

$$B_y = 0 \iff \frac{Bm}{r^3}zy + a = 0 \quad (6.91b)$$

$$B_z = 0 \iff \frac{m}{r^3}(\frac{3}{r^2}z^2 - 1) + b = 0 \quad (6.91c)$$

a) Der Fall des zur Dipolachse parallelen interplanetaren Feldes. Hier ist $a = 0$. Die Struktur der Lösung von (91) hängt vom Vorzeichen von b ab. Für $b > 0$ erhält man als Lösung von (6.91)

$$z = 0 \quad (6.92a)$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{m}{b}} \quad (6.92b)$$

also eine ringförmige Neutrallinie in der Äquatorialebene des Dipols. Die lokale Struktur des Feldes auf dieser Neutrallinie ist die einer X-Linie, da in deren Umgebung (z.B. bei $y = 0$)

$$|B_x| \sim \delta z \quad (6.93a)$$

$$B_z|_{z=0} \sim \delta x \quad (6.93b)$$

wobei δz bzw. δx den Abstand von der Neutrallinie in der jeweiligen Koordinatenrichtung darstellt. Die (rotationssymmetrische) Feldstruktur in der $y = 0$ Ebene ist skizziert in Bild (6.6).

Für $b < 0$ erhält man als Lösung von (6.91)

$$z = y = 0 \quad (6.94a)$$

$$z = \pm \sqrt[3]{-\frac{2m}{b}} \quad (6.94b)$$

Offensichtlich bilden sich zwei Neutralpunkte. Die Singularität ist hier vom Satteltyp

$$B_x, B_y \sim \delta x, \delta y \quad (6.95a)$$

$$B_z \sim -\delta z \quad (6.95b)$$

Die Feldkonfiguration in der $y = 0$ Ebene ist dargestellt in Bild (6.7)

b) Das interplanetare Feld ist nicht parallel zur Dipolachse. Zu dieser allgemeinen Situation läßt sich die Lage der Neutralpunkte ebenfalls noch explizit angeben. Für beliebiges b und $a \neq 0$ erhält man als

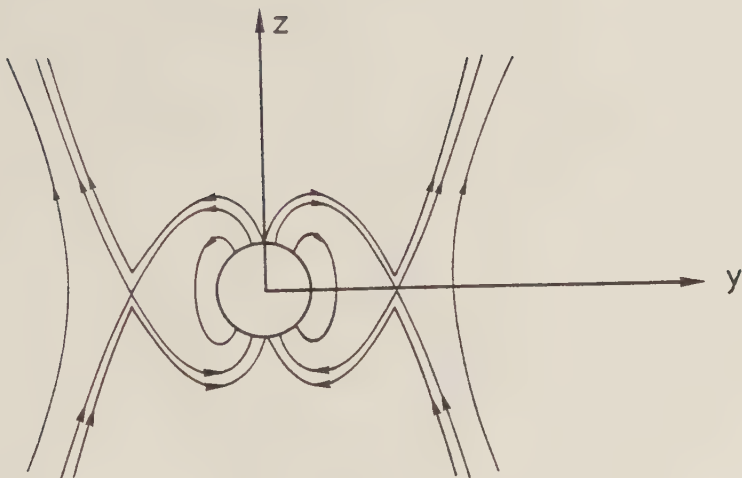


Bild 6.6 · Dipolachse parallel zum interplanetaren Feld.

Lösung der Gleichung $\mathbf{B} = \mathbf{B}_D + \mathbf{B}_{IMF} = 0$:

$$x = 0 \quad (6.96a)$$

$$y_{1,2} = zk_{1,2} \quad (6.96b)$$

$$k_{1,2} = \left(-\frac{3b}{a} \pm \left\{ \frac{9b^2}{4a^2} + 2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (6.96c)$$

$$|z| = \sqrt[3]{-\frac{3mk_{1,2}}{a(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad (6.96d)$$

Dabei bestimmt die Bedingung (6.96d) die Auswahl von $k_{1,2}$ d.h.,

$$a > 0 \implies y = zk_2 \quad (6.97a)$$

$$a < 0 \implies y = zk_1 \quad (6.97b)$$

Aufgrund der Struktur des Magnetfeldes erkennt man, daß es sich bei diesen Neutralpunkten wiederum um Sättel handelt.

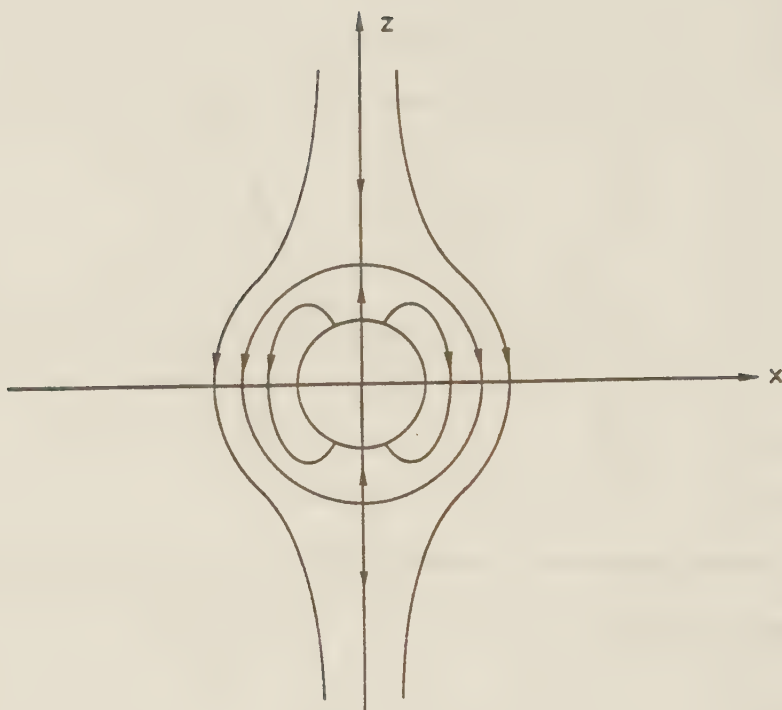


Bild 6.7 Dipolachse antiparallel zum interplanetaren Feld

Nimmt man nun an, daß diese Sattel durch eine Feldlinie verbunden sind, so erhält man als Topologie das Bild die Dungey-Magnetosphäre [Dungey, 1963], die neuerdings von Greene [1987] wieder propagiert wird. Die allgemeine Form dieses Modells nimmt zwei Sattelpunkte an, deren Separatrizen den Himmelskörper umspannen (Bild 6.8 - 6.10)

Die in den Bildern 6.8 - 6.10 gezeigte Struktur darf in gewissen Grenzen als typisch für ein Dipolfeld, dem ein im wesentlichen homogenes externes Feld überlagert wird, angesehen werden. Dieses Modell der

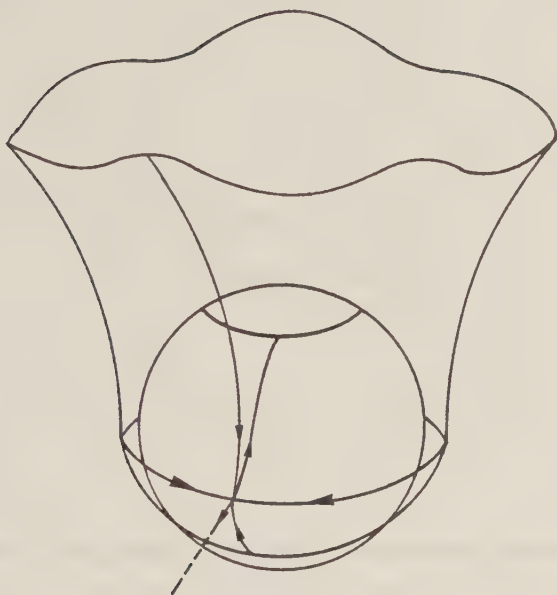


Bild 6.8 Prinzipielle Lage der Separatrixfläche des einen magnetischen Sattelpunktes des Dungey-Modells. Bei diesem Sattel beginnen die Separatrixfeldlinien am Neutralpunkt. Der Himmelskörper ist dargestellt durch die Kugel und die Schnittlinie der Separatrixfläche mit der Kugeloberfläche ist gegeben durch den südlichen eingezeichneten Breitenkreis.

Magnetopause hat allerdings nur topologische Signifikanz. Es vernachlässigt nämlich die Stromschicht an der Magnetopause [z.B. *Crooker*, 1979], so daß das Magnetfeld tatsächlich kein Gradientenfeld ist.

Die Relevanz der magnetischen Neutralpunkte für magnetische Rekonnexion ist nicht offensichtlich. Es ist zwar klar, daß die Forderung einer Plasmaströmung, die an der gesamten Separatrix mit Ausnahme der Neutralpunkte dem idealen Ohm'schen Gesetz unterliegt und die Separatrix überquert, einen Effekt an den Neutralpunkten erzielen muß; andererseits ist es aber zu erwarten, daß nichtideale Prozesse

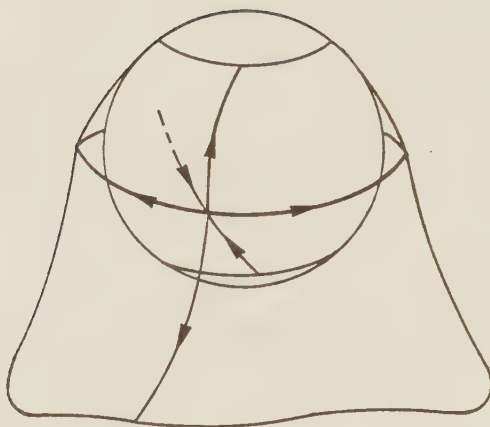


Bild 6.9 Prinzipielle Lage der Separatrix des zweiten magnetischen Sattelpunktes des Dungey-Modells. Hier enden die Separatrixfeldlinien im singulären Punkt und die Separatrixfläche schneidet den Himmelskörper im nördlichen Breitenkreis.

keinesfalls an den Neutralpunkten lokalisiert zu sein brauchen.

Neuere Beobachtungen [Haerendel et al., 1978, Paschmann et al., 1982] und auch theoretische Ansätze [Schindler, 1979] finden, daß Rekonnexion an der Magnetopause nicht nur ein globaler sondern häufig ein lokaler, fleckenhafter Prozeß sei. Der in der Literatur übliche Name hierfür ist "Patchy Reconnection". Die Lokalisierung dieser Rekonnexion läßt erwarten, daß die Singularitäten des Magnetfeldes bei dem Prozeß keine oder höchstens eine untergeordnete Rolle spielen. Da typischerweise in dem eben diskutierten einfachen Modell der Magnetosphäre im externen interplanetaren Magnetfeld die magnetische Feldstärke nirgendwo mit Ausnahme der Neutralpunkte verschwindet, ist, um lokale Rekonnexion an der Magnetopause zu erklären, offenbar ein anderes Modell als Merging zu finden. Dieses ist die Aufgabe von Kapitel 7. In Kapitel 9 wird ein qualitatives Modell der im Zusammenhang mit "Patchy Reconnection" gesehenen Flux-Transfer-Events erarbeitet werden, so daß die Rekonnexion an

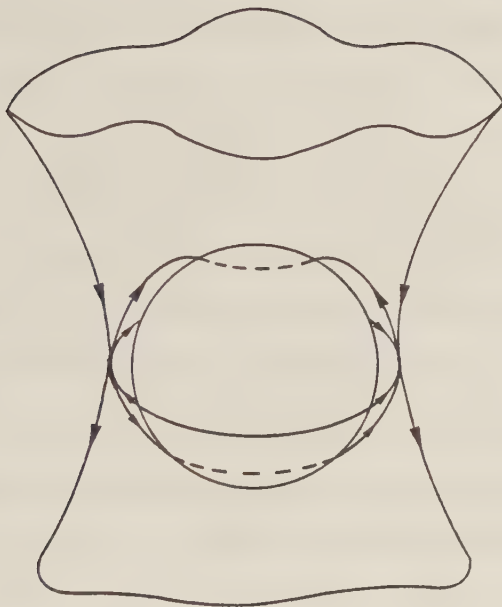


Bild 6.10 Skizze der resultierenden Separatrizen, wenn die Separatrizen der beiden Sattelpunkte aus den Bildern 6.8 und 6.9 überlagert werden.

der Magnetopause in einem anderen Licht gesehen werden kann.

7. $B \neq 0$ -Rekonnexion

7.1. Einführung

Die Untersuchung des traditionellen Rekonnexionskonzepts in Kapitel 6 zeigte bereits, daß in Systemen, wo das Magnetfeld keine Singularitäten aufweist, magnetische Rekonnexion im klassischen Sinn möglicherweise nicht mehr anwendbar ist. Dieses Problem rührt in erster Linie daher, daß ein Übergang von singularitätenbehaftetem B zu singularitätenfreiem B lokal immer zu einem Verlust der Möglichkeit führt, Separatrizen zu definieren. Als Konsequenz hiervon ist es in speziellen Systemen sogar möglich, daß die Rekonnexionsdefinition von *Vasyliunas* [1975] nicht mehr anwendbar wird. Da diese "Strukturelle Instabilität" des Merging Konzepts zusammen mit der in Kapitel 8 diskutierten Plasmoidformation der Ausgangspunkt für die Untersuchung von Rekonnexion in allgemeinen dreidimensionalen Feldern war, soll diesem Aspekt der folgende Abschnitt gewidmet werden.

7.2. Die strukturelle Instabilität der Definition von "Magnetic Merging"

Die Definition von Magnetic Merging [Vasyliunas, 1975, 1984] (siehe Kapitel 6) besagt, daß Merging der Prozeß ist, bei dem Plasma über eine Separatrix strömt, die Gebiete verschiedener Feldtopologie trennt. Dabei soll die Plasmabewegung fast überall, d.h. mit Ausnahme eines lokalisierten Gebietes D_R , dem idealen Ohm'schen Gesetz gehorchen. Wir diskutieren im folgenden die einfachst mögliche Mergingkonfiguration, ein Standardbeispiel für stationäres Merging, welches in ähnlicher Form häufig in der Literatur untersucht wird [z.B. Petschek, 1964; Yeh und Azford, 1970; Sonnerup, 1970; Priest, 1973; Vasyliunas, 1975; Priest und Forbes, 1986]. Das Magnetfeld sei gegeben durch

$$\mathbf{B} = y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z \quad (7.1)$$

B_z ist eine Konstante. Diese (Standard) translationsvariante X-Punkt Konfiguration für $B_z = 0$ wurde bereits in Kapitel 6 diskutiert. Hier soll jedoch der Fall $B_z \neq 0$ betrachtet werden. Zunächst benutzen wir die Methode aus Kapitel 2, um Euler-Potentiale für $\mathbf{B}$ aus (7.1) zu bestimmen. Die charakteristischen Gleichungen sind hier sehr einfach:

$$\frac{dx}{dz} = y \quad (7.2a)$$

$$\frac{dy}{dz} = x \quad (7.2b)$$

$$\hat{z} = \frac{1}{B_z} z \quad (7.2c)$$

Zu den Anfangsbedingungen

$$x(\hat{z} = 0) = x_0 \quad (7.3a)$$

$$y(\hat{z} = 0) = y_0 \quad (7.3b)$$

erhält man als Lösung

$$x = x_0 \cosh \hat{z} + y_0 \sinh \hat{z} \quad (7.4a)$$

$$y = y_0 \cosh \hat{z} + x_0 \sinh \hat{z} \quad (7.4b)$$

Auflösen nach x_0 bzw. y_0 ergibt

$$x_0(x, y, \hat{z}) = x \cosh \hat{z} - y \sinh \hat{z} \quad (7.5a)$$

$$y_0(x, y, \hat{z}) = y \cosh \hat{z} - x \sinh \hat{z} \quad (7.5b)$$

Aus Kapitel 2 wissen wir, daß sich aus diesen Funktionen Euler-Potentiale gewinnen lassen müssen. Man sieht leicht, daß ein Satz von α und β gegeben ist durch

$$\alpha(x, y, z) = B_z \left(x \cosh \frac{z}{B_z} - y \sinh \frac{z}{B_z} \right) \quad (7.6a)$$

$$\beta(x, y, z) = y \cosh \frac{z}{B_z} - x \sinh \frac{z}{B_z} \quad (7.6b)$$

Bei der Wahl dieser Euler-Potentiale wurde von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, für ein zeitunabhängiges Magnetfeld auch zeitunabhängige Euler-Potentiale zu finden. Da während der nächsten Schritte der Diskussion der Wert von $B_z = 0$ unerheblich ist, setzen wir $B_z = 1$. Der Fall $B_z \rightarrow 0$ wird später diskutiert. Damit reduziert sich (7.6) zu

$$\alpha(x, y, z) = x \cosh z - y \sinh z \quad (7.7a)$$

$$\beta(x, y, z) = y \cosh z - x \sinh z \quad (7.7b)$$

Die Separatrix im Magnetfeld (7.1) für $B_z = 0$ ist offensichtlich gegeben durch

$$x^2 = y^2 \quad (7.8)$$

wobei der Separator durch $x = y = 0$ gegeben ist. *Vasyliunas*, [1975] und *Sonnerup* [1984] bezeichnen $x = y = 0$ als Separator und $x^2 = y^2$ als Separatrix auch für $B_z \neq 0$, also z.B. für $B_z = 1$. Wir kommen auf diesen Punkt zurück.

Wir betrachten nun eine ideale Dynamik für α und β , die gegeben ist durch (3.12) und die Definition:

$$\psi(\alpha, \beta, t) := \alpha\beta \quad (7.9)$$

Die dynamischen Gleichungen für α und β werden dann

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\alpha \quad (7.10a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta \quad (7.10b)$$

mit den Lösungen

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-t} \quad (7.11a)$$

$$\beta(t) = \beta_0 e^t \quad (7.11b)$$

Bevor dieses Ergebnis interpretiert werden kann, muß die verschwindende explizite Zeitabhängigkeit von α und β ausgenutzt werden. Damit wird

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \alpha \quad (7.12a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \beta \quad (7.12b)$$

Also ist die Änderung der α und β Werte des Plasmas (7.11) allein durch die Bewegung des Plasmas hervorgerufen. Daher ist $\mathbf{v} \neq 0$ (7.12) und das Plasma strömt im Raum. Offensichtlich ist diese Strömung ideal und beschränkt in endlichen Gebieten; es ist

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi \perp \mathbf{B} \quad (7.13)$$

Auf der Linie $x = y = 0$ gilt $\mathbf{E} = 0$. Betrachten wir nun Plasmaelemente, welche sich zur Zeit $t = 0$ auf der Kandidatin $x^2 = y^2$ für eine Separatrixfläche befinden. Ausgedrückt durch Euler-Potentiale α und β (7.7) wird die Bedingung $x^2 = y^2$

$$\alpha^2 = \beta^2 \quad (7.14)$$

d.h., alle Plasmaelemente, die sich auf Feldlinien befinden, deren α und β Koordinaten Gleichung (7.14) genügen, liegen in der Separatrixfläche. Für spätere Zeiten $t > 0$ kann jedoch (7.14) nicht mehr erfüllt sein, wenn als Anfangsbedingung $\alpha_0^2 = \beta_0^2$ galt. Offensichtlich hat das Plasma die Fläche (7.14) überquert. Dies ist ein Widerspruch zu *Vasyliunas'* Definition von Merging.

Dieses Phänomen wird verständlich mit Satz 2 aus Kapitel 5. Angewendet auf das Feld (7.1) mit $B_z \neq 0$ bedeutet dieser Satz, daß lokal alle Feldlinien dieses Feldes topologisch gleich sind und daher

keine Linie (Separator) ausgezeichnet wird. Damit schließen wir, daß das Separatrixkonzept der magnetischen Rekonnexion mangels einer solchen nicht mehr anwendbar ist. Der Verlust der Anwendbarkeit beim Übergang von $B_z = 0$ zu $B_z \neq 0$ ist ein typischer Fall von struktureller Instabilität. Bei jeder (noch so kleinen) Störung eines Magnetfeldes mit Neutrallinie durch eine zusätzliche Parallelkomponente bricht die Mergingtheorie zusammen. Es ist nicht auszuschließen, daß an einem globalen Separator die Möglichkeit besteht, *Vasyliunas'* Konzept von magnetischer Rekonnexion anzuwenden. Da es jedoch einerseits meßtechnisch praktisch unmöglich ist, einen globalen Separator zu erkennen und es andererseits zum einen Rekonnexionsrelevante Strukturen gibt, die überhaupt keine Separatoren besitzen (vgl. Kapitel 8) und zum anderen Rekonnexion in Analogie zu Prozessen wie Diffusion etc. strukturell stabil sein sollte, finden wir auch hier, daß eine Erweiterung und Neudefinition vonnöten war.

Daß die topologische Struktur der Integralflächen des Magnetfeldes (7.1) wesentlich davon abhängt, ob $B_z = 0$ oder $B_z \neq 0$ gesetzt wird, ist offensichtlich bei Betrachtung von Gleichungen (7.6). Im Übergang $B_z \rightarrow 0$ existieren die Euler-Potentiale $\alpha_0 = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$, $\beta_0 = z$ die offenbar wesentlich andere Äquipotentialflächen haben. Eine kanonische Transformation der Potentiale (7.6) auf $\alpha' = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$ und geeignetes β' ergibt ein singuläres β' , dessen Singularität verschwindet, wenn $B_z = 0$ gesetzt wird. Dieser Übergang ist jedoch nicht gleichmäßig. All dies ist eine wesentliche Motivation, das Rekonnexionskonzept zu verallgemeinern. Die physikalischen Aspekte hiervon sollen im nächsten Abschnitt vorgestellt werden.

7.3. Rekonnexion in singularitätenfreien Magnetfeldern

Abgesehen von *Vasyliunas'* Definition von Merging, die offensichtlich nur dann anwendbar ist, wenn $\mathbf{B}$ Singularitäten besitzt, existieren in der Literatur weitere Versuche, magnetische Rekonnexion zu definieren. Das Manko der meisten dieser Ansätze [*Sonnerup*, 1984, *Ugai*, 1981] ist, daß sie an spezielle Konfigurationen, insbesondere an X-Punkte mit zusätzlicher Normalkomponente von $\mathbf{B}$ gebunden sind. In generischen Fällen, in denen Rekonnexion eine wesentliche Rolle spielen sollte, lassen sich jedoch solche Feldstrukturen nicht finden. Beispiele hierfür sind Rekonnexionsmodelle an der Ionosphäre [z.B. *Haerendel*, 1987], Plasmoidmodelle wie in Kapitel 8 diskutiert, und schließlich ist es ebenfalls möglich, einfache Modelle für Flux-Transfer-Events zu konstruieren (Kapitel 9), die diese Feldstrukturen nicht aufweisen. Desweiteren wurde im vorigen Abschnitt schon erwähnt, daß lokal in einem nichtsingulären Magnetfeld alle Feldlinien topologisch gleichwertig sind. Daher kann ein allgemeines Konzept von magnetischer Rekonnexion nicht auf speziellen Feldstrukturen aufbauen, es sei denn, $\mathbf{B}$ weist Neutralpunkte auf.

In der Literatur [*Axford*, 1984] existiert nun eine Definition von magnetischer Rekonnexion, die eine hinreichend große Allgemeinheit besitzt. *Axford* [1984] definiert magnetische Rekonnexion als die lokalisierte Verletzung der Bedingung für in das Plasma "eingefrorenes" Magnetfeld und die daraus resultierenden Änderungen der "Verbindung". "Verbindung" in diesem Zusammenhang bedeutet, daß Plasmaelemente, welche zu einer Zeit durch eine magnetische Feldlinie verbunden sind, zu späteren Zeiten verbunden bleiben. Wie man bereits qualitativ sieht, besitzt dieses Konzept Vorteile gegenüber den topologisch motivierten Ansätzen [vgl. *Schindler et al.*, 1988]. Weiterhin ist es offensichtlich, daß diese Definition konsistent ist mit der abstrakten Definition allgemeiner magnetischer Rekonnexion, die in Kapitel 5 gegeben wurde.

In diesem Abschnitt wird diese Definition für singularitätenfreie Magnetfelder in ein formales Gewand gekleidet [vgl. *Hesse und Schindler*, 1988] und physikalische Eigenschaften untersucht. Es wird sich zeigen, daß Rekonnexion für $\mathbf{B} \neq 0$ auf verschiedene Weise vonstatten gehen kann. Zur Erarbeitung eines Rekonnexionsmodells für Magnetfelder ohne Neutralpunkte beschreiben wir $\mathbf{B}$ durch Euler-Potentiale α

und β und führen als weitere Koordinate die Bogenlänge s ein. Weiterhin soll sich eine lokalisierte Region D_R , wo das nichtideale Ohm'sche Gesetz (3.1) gilt, innerhalb des großen betrachteten Systemvolumens Ω befinden. Um die Linienenerhaltung zu verletzen, muß wie in Kapitel 4 gezeigt, in D_R gelten

$$\nabla \times \mathbf{R} \neq 0 \quad (7.15)$$

Wie sich im folgenden ergeben wird, kann die resultierende Linienenerhaltsverletzung globale und lokale Effekte haben. Wir wollen hier unter globalem Effekt verstehen, daß Plasmaelemente weit außerhalb des nichtidealen Gebiets von dem Rekonnexionsprozeß beeinflusst werden. Wenn nur Plasmaelemente, die durch den nichtidealen Bereich hindurchgelaufen sind, von dem Prozeß beeinflusst werden, so sei dies mit lokaler Effekt bezeichnet.

Es ist für magnetische Rekonnexion sicher von größerer Bedeutung, daß der Einfluß des Prozesses tief in der idealen Region spürbar ist, denn die Plasmaelemente, die von Rekonnexion beeinflusst werden, sollten dazu nicht notwendigerweise durch D_R hindurchgelaufen sein müssen. Daher konzentrieren wir die Diskussion auf globale Effekte; am Ende des Abschnitts sollen lokale Effekte kurz angesprochen werden. Die wesentliche Aussage dieses Abschnitts wird zusammengefaßt in dem folgenden Theorem:

Satz 1: Wenn das Magnetfeld $\mathbf{B}$ nicht verschwindet, dann hat magnetische Rekonnexion genau dann globale Effekte, wenn

$$\int_{\alpha_0, \beta_0} ds \ E_{\parallel} \neq 0$$

auf einem endlichen magnetischen Fluß im D_R . Hierbei bezeichnet $E_{\parallel}$ das zum Magnetfeld parallele elektrische Feld und die Indizes α_0 und β_0 , daß die Integration über die Feldlinie $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$ ausgeführt wird. Zum Beweis des Satzes betrachten wir noch einmal Gleichungen (3.8).

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial\beta} - R^{\beta} \quad (3.8a)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + R^{\alpha} \quad (3.8b)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = -R^s \quad (3.8c)$$

Die Änderung von ψ zu einer festen Zeit t_0 entlang einer Feldlinie ist gegeben durch (3.8c). Außerhalb D_R ist ψ unabhängig von s und daher nur eine Funktion von α , β und t . Auf Feldlinien, welche zur Zeit t_0 durch D_R hindurchgehen, kann ψ jedoch auf verschiedenen Seiten der nichtidealen Zone verschiedene Struktur haben. Die Situation ist schematisch dargestellt in Bild (7.1).

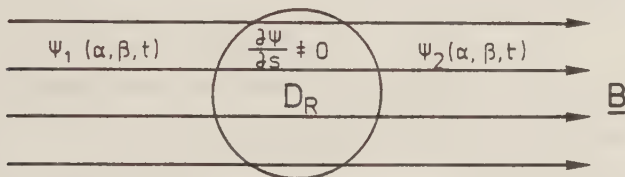


Bild 7.1 Schematische Darstellung der Möglichkeit differierender Euler-Potentialdynamik auf verschiedenen Seiten der nichtidealen Zone D_R .

Die Differenz der (idealen) Euler-Potentialdynamik auf beiden Seiten der nichtidealen Region D_R ist offenbar gegeben durch

$$\psi_2(\alpha, \beta, t) - \psi_1(\alpha, \beta, t) = \int_1^2 ds \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (7.16)$$

wobei 1 und 2 Punkte auf verschiedenen Seiten von D_R bezeichnet und für die Integration α und β festgehalten werden, d.h., die Integration geht entlang Feldlinien. Es ist wichtig zu bemerken, daß die Annahme einer lokalisierten Nichtidealität die Existenz des Integrals auf der rechten Seite von (7.16) garantiert. Dieses Integral ist entweder eine nichttriviale Funktion von α und β (und t) oder identisch verschwindend, da eine einfache Konstante oder Funktion der Zeit allein die Stetigkeit von ψ am Rand von D_R verletzen würde. Daher wird, falls das Integral in (7.16) einen nichtverschwindenden Beitrag liefert, die Dynamik der Euler-Potentiale auf beiden Seite von D_R verschieden sein. Dieses impliziert, daß Plasmaelemente, die anfänglich auf dieser gemeinsamen Feldlinie liegen, ihre Verbindung verlieren können unabhängig davon, wie weit sie auf einer Feldlinie von D_R entfernt sind. Damit ist die magnetische

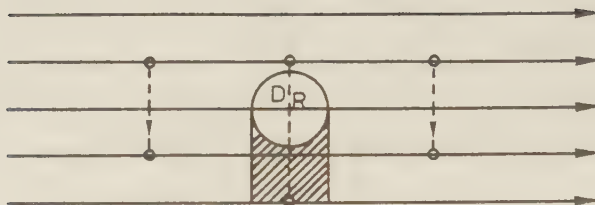


Bild 7.2 Illustration des lokalen Effektes magnetischer Rekonnexion. Das schraffierte Gebiet enthält Plasmaelemente, die im Laufe der Zeit durch D_R hindurchgelaufen sind.

Verbindung zwischen diesen Plasmaelementen unterbrochen im Sinne von "globalem Effekt".

Offensichtlich benötigt Rekonnexion für $B \neq 0$ mit globalen Effekten, daß $\partial\psi/\partial s$ ein nicht verschwindendes Integral auf bestimmten Feldlinien ergibt. Diese Bedingung läßt sich nun ausdrücken durch das elektrische Feld. Mit Gleichung (2.45b) folgt nämlich, daß die Komponente von E parallel zu B gegeben ist durch

$$E_{\parallel} = -\frac{\partial\psi}{\partial s} = R^s \quad (7.17)$$

Also folgt, daß für globale Effekte der magnetischen Rekonnexion

$$\int ds E_{\parallel} \neq 0 \quad (7.18)$$

sein muß. Dies, zusammen mit der Bemerkung, daß, für physikalische Signifikanz des Prozesses, (7.18) auf einer Menge von Feldlinien endlichen Flusses gelten muß, ist die Aussage von Satz 1.

Der nächste Schritt der Untersuchung von $B \neq 0$ -Rekonnexion ist die Analyse der Fälle, für die (7.18) nicht gilt, aber die Linienenerhaltung verletzt ist, also mit (7.15), R kein Gradient sein kann. Außerhalb von D_R ist dann die Dynamik des Magnetfeldes und des Plasmas, ausgedrückt durch die Dynamik der Euler-Potentiale, unbeeinflusst von D_R , so daß die nur Verbindung zwischen Plasmaelementen innerhalb D_R und Plasmaelementen außerhalb D_R unterbrochen werden kann. Nach einer endlichen Zeit kann sich dieser Effekt auf alle Plasmaelemente in einer Art "Schweif" von D_R auswirken (Bild 7.2).

Der Zusammenhang zwischen $B \neq 0$ -Rekonnexion und der abstrakten Definition aus Kapitel 5 ist klar bei Betrachtung der Bilder (7.1) und (7.2). Bei $B \neq 0$ -Rekonnexion liegt die Situation vor, wo in jedem Fall die Plasmabewegung nicht kompatibel zur Zeitentwicklung des Magnetfeldes ist.

Am Ende der Untersuchung von $B \neq 0$ -Rekonnexion mit lokalen Effekten bleibt noch anzumerken, daß hier Fälle eingeschlossen sind, wo $\psi = \psi(\alpha, \beta, t)$ und nur R^α und R^β innerhalb D_R von Null verschieden sind.

7.4. Magnetische Helizität, Spontane Prozesse

Die in Kapitel 8 untersuchte Plasmoidbildung im Schweif der Magnetosphäre für nichtsinguläre Magnetfelder, die Strukturen mit spiralenenden Feldlinien ergibt, läßt vermuten, daß bei solchen Prozessen die magnetische Helizität eine Rolle spielt. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß in besonders interessanten Fällen von $B \neq 0$ -Rekonnexion Änderung der magnetischen Helizität von Bedeutung ist.

Während der Begriff Helizität aus der Fluiddynamik stammt und dort als

$$H = \int_V \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega} dV \quad (7.19)$$

definiert ist ($\mathbf{v}$ bezeichnet das Geschwindigkeitsfeld und $\boldsymbol{\omega}$ dessen Rotation), wurde Helizität in der Plasmaphysik von *Woltjer* [1958], *Moffat*, [1978] und *Taylor* [1986 u. Referenzen darin] eingeführt als

$$K = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \quad (7.20)$$

Im Gegensatz zu der fluiddynamischen Helizität taucht bei der plasmaphysikalischen ein Problem auf. *Taylor* [1986] benutzte als Randbedingungen an das von ihm untersuchte toroidale Magnetfeld

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (7.21)$$

wobei $\mathbf{n}$ die nach außen gerichtete Flächennormale der Toruswand ist. Mit dieser Randbedingung ist K (7.20) unabhängig von der Eichung von $\mathbf{A}$. Natürlich ist diese Randbedingung eine starke Einschränkung an die Anwendbarkeit der magnetischen Helizität. Im weiteren soll der Helizitätsbegriff daher erweitert werden und in Zusammenhang mit magnetischer Rekonnexion gestellt werden [vgl. *Hesse* und *Schindler*, 1988].

Zur Herleitung eines allgemeineren Helizitätsbegriffes benutzen wir die Maxwell'schen Gleichungen und erhalten

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\Phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \quad (7.22)$$

Integration von (7. 22) über ein festes Volumen Ω ergibt dann:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) dV + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot [\Phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}] dS = -2 \int_{D_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV \quad (7.23)$$

(mit: $\partial\Omega$: Oberfläche von Ω , $\mathbf{n}$: auswärtsgerichtete Flächennormale). Das Integral auf der rechten Seite von (7.23) erstreckt sich nur über D_R , da $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ außerhalb D_R . Diese Gleichung bestimmt die Zeitabhängigkeit der konventionellen Helizität K unabhängig von der Eichung, wenn der Oberflächenterm verschwindet. Im folgenden seien $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{A}_0$ das Magnetfeld und das Vektorpotential in beliebiger Eichung zu einer Referenzzeit t_0 und $\mathbf{B}$ und $\mathbf{A}$ die Größen zu einer beliebigen Zeit $t > 0$. Wir betrachten das Integral

$$I = \oint_{\partial\Omega} [\phi \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{E} \times \mathbf{A}_0) \cdot \mathbf{n}] ds \quad (7.24)$$

Durch den Gauß'schen Satz und die Addition und Subtraktion des Terms $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_0$ unter dem Integralzeichen erhält man

$$I = \int_{\Omega} [\nabla \cdot (\phi \mathbf{B}_0) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_0 - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{A}_0) - \nabla \times \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{E}] dV \quad (7.25)$$

$$= \int_{\Omega} [\nabla \phi \cdot \mathbf{B}_0 + \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0 \cdot (-\nabla \times \mathbf{E})] dV \quad (7.26)$$

Wir definieren nun die verallgemeinerte Helizität $\bar{K}$ zu:

$$\bar{K} = \int_{\Omega} dV (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0) dV \quad (7.27)$$

Durch Differentiation erhält man sofort

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{dK}{dt} + I \quad (7.28)$$

so daß gilt:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)\phi + \mathbf{E} \times (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0)] dS = -2 \int_{D_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} dV \quad (7.29)$$

Damit ist $\bar{K}$ eine eichunabhängige Größe, wenn das Oberflächenintegral in (7.29) verschwindet. Dieses ist der Fall, wenn

$$[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}]_{\partial\Omega} = 0 \quad (7.30a)$$

$$[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\partial\Omega} = 0 \quad (7.30b)$$

für die betrachteten Zeiten. Für $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ reduziert sich $\bar{K}$ aus (7.27) wieder zu K (7.20).

Unter den Bedingungen (7.30) erhalten wir also

$$\begin{aligned}\bar{K}(t, t_0) &= -2 \int_{t_0}^t dt \int_{D_R} dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \\ &= \int_{\Omega} dV (\mathbf{A} + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{B}_0)\end{aligned}\quad (7.31)$$

Besonders interessante Vorgänge in der Physik allgemein und speziell in der Plasma-Astrophysik sind spontane Prozesse. Ein spontaner Prozess ist verbunden mit einem Stabilitätsübergang eines zeitlich langsam veränderlichen Systems. Erreicht zum Beispiel einer der Systemparameter im Laufe seiner langsamen Zeitentwicklung einen kritischen Wert, so kann sich das Gesamtsystem plötzlich sehr schnell ändern, ohne daß diese schnelle Änderung durch eine ähnlich schnelle Änderung der externen Parameter (Randbedingungen) hervorgerufen wird. Beispiele hierfür gibt es in vielen Bereichen der Physik; in der Plasmaphysik ist das Stabilitätsverhalten von Stromschichten bei verschiedenen thermodynamischen Randbedingungen zu nennen [Hesse und Schindler 1986; Hesse und Kießling 1987], in der Astrophysik das Stabilitätsverhalten von Magnetosphärenmodellen mit fixiertem Gesamtstrom [Kießling und Schindler, 1987], die Plasmoidbildung in der Magnetosphäre [Schindler, 1984, Birm und Schindler 1986] und schließlich fand Zwingmann [1987] für solare Anwendungen ein Stabilitätsdiagramm für Flare-Strukturen, welches eine Erklärung für den Einsatz von Instabilität bei koronalen Strukturen geben kann.

Typisch für spontane Prozesse ist also der vernachlässigbare Einfluß externer Bedingungen. In der Plasmaphysik werden solche Bedingungen durch das elektrische Feld übertragen, also können wir für spontane Prozesse fordern: Das elektrische Feld $\mathbf{E}_a$ in einer Umgebung der Gebietsgrenze $\partial\Omega$ soll sich durch:

$$\mathbf{E}_a = 0 \quad (7.32)$$

approximieren lassen. Natürlich folgt damit sofort

$$\left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7.33)$$

Offenbar sind bei spontanen Prozessen also die Anwendungsbedingungen für die verallgemeinerte Helizität

$\overline{K}$ erfüllt. Wenn wir jetzt noch berücksichtigen, daß gilt

$$\int_{D_R} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, dV = \int_{D_R} d\alpha d\beta ds \, E_{\parallel} \quad (7.34)$$

so haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 2: Ändert sich durch einen spontanen Prozess in einem fast überall idealen System die verallgemeinerte Helizität $\overline{K}$, so hat $B \neq 0$ -Rekonnexion stattgefunden.

Die Umkehrung von Satz 2, also die Schlußfolgerung, daß aus $B \neq 0$ -Rekonnexion die Änderung der Helizität folgt, gilt nicht allgemein. Es ist nämlich möglich, daß sich das Vorzeichen von $E_{\parallel}$ innerhalb von D_R ändert, so daß sich die Beiträge bei der Integration (7.34) aufheben. Andererseits ist es zu erwarten, daß der Effekt von Rekonnexion mit $E_{\parallel}$ welches ein Vorzeichen hat, größer ist, so daß in den bedeutenderen Fällen auch die Umkehrung des Satzes gilt.

Magnetische Helizität, definiert durch (7.27), bietet die Möglichkeit bei spontanen Prozessen Rückschlüsse über magnetische Rekonnexion aus der Kenntnis der Magnetfeldkonfiguration am Anfang und am Ende des betrachteten Zeitintervall zu ziehen. Sei das elektrische Feld an der Grenze $\partial\Omega$ des betrachteten Gebietes Ω vernachlässigbar in einem Zeitintervall $[t_0, t_1]$. Außerdem sei das Magnetfeld $\mathbf{B}_0$ zur Zeit $t = t_0$ und $\mathbf{B}_1$ zur Zeit $t = t_1$ bekannt. Dann lassen sich $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{B}_1$, integrieren zu Vektorpotentialen $\mathbf{A}_0$ und $\mathbf{A}_1$ bei denen wir keine Eichung zu spezifizieren brauchen. Mit den Feldern $\mathbf{B}_0$ und $\mathbf{B}_1$ und deren Vektorpotentialen läßt sich die verallgemeinerte Helizität $\overline{K}$ aus (7.27) berechnen. Wenn $\overline{K}(t_0, t_1)$ verschieden von Null ist, so hat $B \neq 0$ -Rekonnexion stattgefunden. Hierbei haben wir natürlich implizit die Lokalisierung der Nichtidealität vorausgesetzt, wie es in astrophysikalischen Plasmen häufig der Fall ist [Vasyliunas, 1975].

Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß ein relativ enger Zusammenhang zwischen magnetischer Helizität und Rekonnexion in Systemen besteht, die spontane Strukturänderung durchmachen. Anschaulich ist dies verständlich bei Betrachtung der spiralen Magnetfelder der Plasmoide in der Magnetosphäre (Kapitel 8) und der Flux-Transfer-Events (Kapitel 9) an der Magnetopause, denn Helizität wird in Zusammenhang gesehen mit verknüpften magnetischem Fluß [z.B. Moffat, 1978; Taylor, 1986]. Es ist

an und für sich nicht überraschend, daß das Helizitätskonzept nur in spontanen Systemen anwendbar ist, denn ein "Offenhalten" der Randbedingungen ermöglicht den Transport von Helizität aus dem oder in das betrachtete System.

8. Plasmoidformation in drei Dimensionen: Ein Beispiel für allgemeine magnetische Rekonnexion

Die Plasmoidformation im Magnetosphärenschweif der Erde ist eines der am meisten untersuchten Beispiele von Rekonnexionsprozessen. Die Bildung und das Herausschleudern einer Struktur von im Magnetfeld eingeschlossenen Plasma, die Plasmoid genannt wird im Zuge einer Tearing-Instabilität, ist der wesentliche Mechanismus des Energietransports in magnetosphärischen Substürmen. In fast allen Theorien dieses Vorgangs wird eine translationsinvariante Approximation, also ein zweidimensionales Modell, diskutiert [z.B. *Schindler*, 1974; *Hones*, 1977; *Birn*, 1980; *Otto*, 1987]. Mit Ausnahme der MHD-Simulation von *Birn* und *Hones* [1984], die jedoch eine genaue topologische Analyse aufgrund zu geringer Auflösung nicht zulässt, wird erst in jüngster Zeit die magnetische Struktur von dreidimensionalen Plasmoidstrukturen untersucht. Ein erster qualitativer Vorschlag hierzu wurde von *Hughes* und *Sibeck* [1987] unabhängig von der vorliegenden Untersuchung geliefert. *Hughes* und *Sibeck* verallgemeinerten das bekannte zweidimensionale Plasmoidbild durch die Einführung einer Abhängigkeit von der Koordinate in der invarianten Richtung und Überlagerung einer Magnetfeldkomponente in derselben Richtung. Das (qualitative) Resultat ist eine Flußröhre aus spiralenden Feldlinien.

Der Zweck des vorliegenden Kapitels ist die Vorstellung eines einfachen kinematischen Modells der Plasmoidbildung und -entwicklung, das es erlaubt, generische Aspekte allgemeiner magnetischer Rekonnexion in Plasmoidkonfigurationen aufzuzeigen. Zudem erlaubt die topologische Struktur der Plasmoidfeldlinien die Vorstellung eines neuen Dissipationsmechanismus. Dieses soll am Ende des Kapitels qualitativ diskutiert werden.

Bevor das kinematische Modell eingeführt wird, soll an dieser Stelle ein kurzer Überblick über die topologischen Aspekte der Plasmoidentwicklung in zweidimensionalen Modellen gegeben werden, um den Unterschied zur Topologie eines dreidimensionalen Modells zu verdeutlichen. Eine zeitliche Sequenz der Plasmoidevolution ist qualitativ dargestellt in Bild (8.1). Teil a) zeigt eine ruhige Magnetosphäre mit fernem X-Punkt. Die vom X-Punkt ausgehenden Separatrizen trennen Feldlinien, die im Vasyliu-

nas'schen Sinne [Vasyliunas, 1975] verschiedene Topologie besitzen, d.h. entweder dipolartige, halboffene oder interplanetare Topologie besitzen. Durch Einsatz von Rekonnexion (Tearing) bildet sich innerhalb des Bereichs der dipolartigen Feldlinien ein weiterer X-Punkt mit einem Gebiet geschlossener Feldlinien, welches durch die Separatrix, die vom neuen X-Punkt ausgeht, abgetrennt wird (Teil b)). Durch Rekonnexion vergrößert sich der Bereich geschlossenen Flusses bis daß der in Teil c) dargestellte Fall eintritt: Die Separatrizen der beiden X-Punkte fallen zusammen. Ab diesem Zeitpunkt verändert sich der geschlossene Fluß quantitativ praktisch nicht mehr [Otto, 1987], statt dessen bewegt sich das Plasmoid mit nahezu konstanter Geschwindigkeit schweifwärts. Dabei wechseln die beiden X-Punkte die Rollen, so daß der erdferne X-Punkt die Plasmoidseparatrix definiert und sich mit dem Plasmoid schweifwärts bewegt. Diese Situation ist skizziert in Teil d).

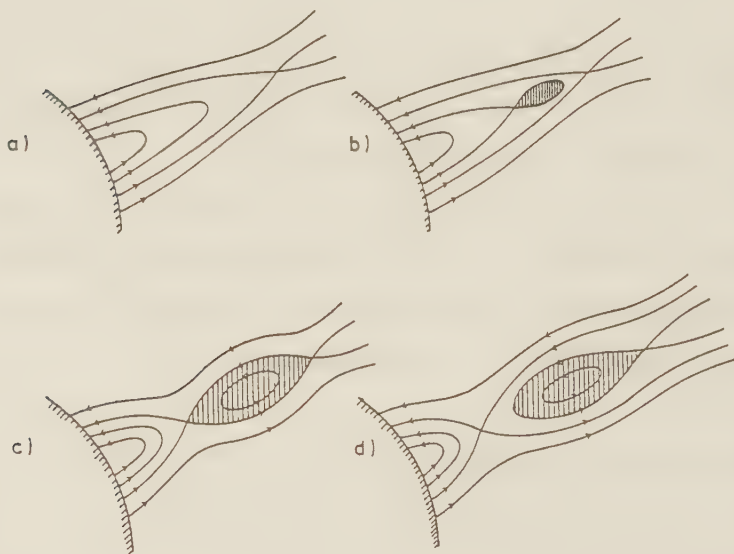


Bild 8.1 Topologie der zweidimensionalen Plasmoidentwicklung

Die Rekonnexion, die der treibende Mechanismus dieser Evolutionsfolge ist, gehört im Rahmen der Klassifikation der allgemeinen Rekonnexion (Kapitel 10) zu $B=0$ -Rekonnexion. Der Ausgangspunkt der folgenden Untersuchung ist die Frage, ob sich das Rekonnexionskonzept des Merging, wie von *Vasyliunas* [1975] eingeführt, auch in allgemeineren dreidimensionalen Modellen, etwa anhand globaler Topologie, verwenden läßt.

Das Plasmoidmodell versucht dazu auf möglichst einfache Weise, Aspekte der zweidimensionalen Modelle zu beinhalten. Der erste Schritt in dieser Richtung ist die Annahme, daß in jeder poloidalen Ebene ($y = \text{konstant}$) das poloidale Magnetfeld topologisch einem der Fälle von Bild 8.1 entspricht, aber in verschiedenen Ebenen verschieden sein kann.

Die genaue Abhängigkeit der Struktur des poloidalen Feldes von der Koordinate y wird bestimmt durch die Lage der neutralen Linien, d.h., der X- und O-Linien. Hier werden die Positionen der neutralen Linien so modelliert, daß die ferne X-Linie im frühen Stadium der Entwicklung eine Gerade ist und die erdnahen Neutrallinien eine Ellipse bilden. In späteren Stadien wird die erdferne X-Linie in den Bereichen, wo im poloidalen Feld das Plasmoid abgelöst wäre, schweifwärts herausgezogen. Dabei ist der abgelöste poloidale Fluß ungefähr konstant.

Echt dreidimensionale Effekte werden eingeführt durch eine überlagerte konstante Magnetfeldkomponente in y -Richtung. Das Vorhandensein einer derartigen Magnetfeldkomponente quer zum Schweif ist typisch, wie Beobachtungen zeigen [z.B. *Fairfield*, 1979].

Das Modellmagnetfeld ist dann gegeben durch den Ansatz

$$\mathbf{B} = \nabla A(x, y, z) \times \mathbf{e}_y + B_y \mathbf{e}_y \quad (8.1)$$

wobei $A(x, y, z)$ die poloidale Flußfunktion ist. Der Einfachheit halber wird A angesetzt als Polynom in x und z mit y -abhängigen Koeffizienten. Ein geeigneter Ansatz ist

$$A(x, y, z) = -\frac{\alpha}{2} z^2 + \hat{b} \left[\frac{x^4}{4} + (p - x_f(y)) \frac{x^3}{3} + (q(y) - p x_f(y)) \frac{x^2}{2} - x_f(y) q(y) x \right] \quad (8.2a)$$

Die Konstante p ist definiert durch

$$p = 2(d - x_{f0}) \quad (8.2b)$$

Hier ist x_{f0} die x -Koordinate der fernen X-Linie für $y \rightarrow \infty$ und d ein Parameter, der die Evolution des Plasmoids von früheren zu späteren Zeiten beschreibt. Desweiteren sind

$$q(y) = -\left(\frac{p}{2} + x_n\right)^2 (1 - (\Delta y)^2 y^2) \quad (8.2c)$$

$$\text{Falls } d > -\frac{3}{4}(x_{f0} + x_n) :$$

$$y^* = \frac{1}{\Delta y} \left[1 - \left(\frac{x_{f0} + p/2}{x_n + p/2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.2d)$$

$$\delta = \frac{1}{y^*} \left(p + (x_{f0} + \frac{3x_n}{2}) \right) \quad (8.2e)$$

$$\hat{b} = \frac{k}{\left(\frac{5}{2}(x_n - x_{f0}) + 2d\right)^3} \quad (8.2f)$$

$$\text{Falls } d \leq -\frac{3}{4}(x_{f0} + x_n) :$$

$$y^* = 0 \quad (8.2g)$$

$$\delta = 0 \quad (8.2h)$$

$$\hat{b} = \frac{k}{(x_n - x_{f0})^3} \quad (8.2i)$$

Die verschiedenen Parameter haben folgende Bedeutung:

- Δy ist die halbe Breite der ellipsenförmigen erdnahen Neutrallinien,
- y^* bezeichnet den y -Wert, bis zu dem das poloidale Feld eine abgelöste zweidimensionale Plasmoidstruktur zeigt,
- δ steuert als Amplitude das Herausziehen der fernen X-Linie für spätere Entwicklungsstadien,
- $\hat{b}$ wurde eingeführt, um den sonst in diesem einfachen Modell extrem hoch anwachsenden Fluß durch die $z = 0$ -Ebene zu beschränken. Die numerische Konstante wurde entsprechend gewählt ($k = 1.728 \times 10^4$).

$x_f(y)$ beschreibt die Lage der fernen X-Linie als Funktion von y , es ist gegeben durch

$$x_f(y) = x_{f0} + \delta \left[\frac{1}{2}(y^{*2} - y^2 + |y^{*2} - y^2|) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8.2j)$$

Einsetzen von (8.2a) in (8.1) bestimmt das Magnetfeld

$$B_x = \alpha z \quad (8.3a)$$

$$B_y = \text{konst.} \quad (8.3b)$$

$$B_z = \hat{b}(x - x_f(y))(x^2 + px + q(y)) \quad (8.3c)$$

Die Konstante α wurde zu $\alpha = 5000$ gewählt. Der numerische Wert der Feldstärke ist eigentlich unerheblich; um magnetosphärische Feldstärken zu beschreiben wäre B in 10^{-12}T zu messen. Die Längenskala ist ein Erdradius in allen Raumrichtungen.

Der Parameter d ist der Kontrollparameter der Evolution des Plasmoids. Natürlich ist diese Evolution im kinematischen Sinne zu verstehen; soweit jedoch die Feldtopologie allein diskutiert wird, kann d als Funktion der Zeit verstanden werden.

Bilder 8.2 a-d zeigen die Lage der X- und O-Linien für verschiedene Werte von d . Man sieht, daß für betragsmäßig große negative d das Plasmoid sich weit von der fernen X-Linie entfernt bildet und daher kein topologischer Einfluß derselben auf das Plasmoidfeld ausgeübt wird.

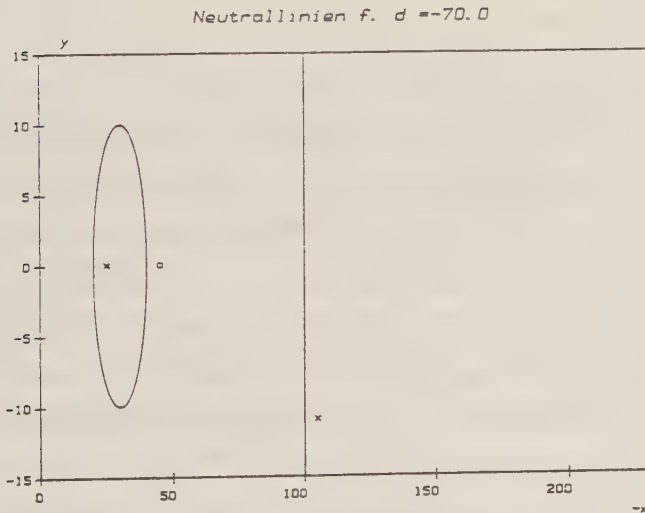


Bild 8.2a ($d = -70$)

Neutrallinien f. $d = -60.0$

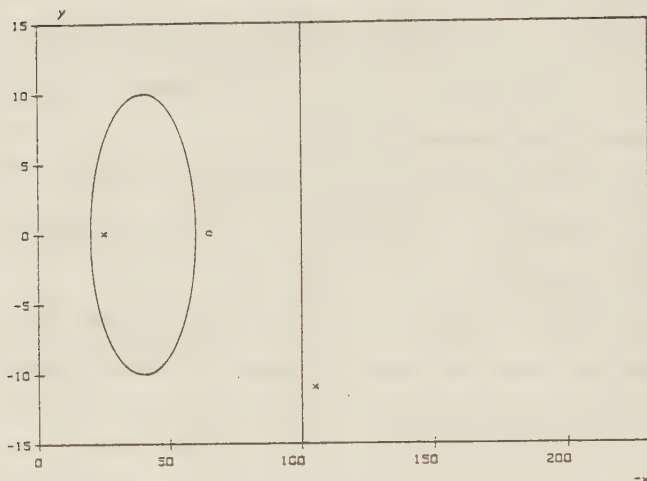


Bild 8.2b ($d = -60$)

Bild 8.2 b) beschreibt den Fall, wo in der Mitte ($y = 0$) die poloidalen Separatrizen die X-Punkte verbinden, entsprechend dem in Bild 8.1 c) gezeigten Stadium. Ab diesem Entwicklungspunkt ist das Auftreten von abgelösten Feldlinien, die nicht mehr mit der Erde verbunden sind, zu erwarten, da in dem zweidimensionalen Fall ($B_y = 0$) hiernach Teile des Plasmoids abgelöst sind. Teil d) zeigt die kritischen Linien für $d = 0$, d.h. für das Stadium, wo das Plasmoid für $B_y = 0$ vollständig abgelöst wäre.

Die zunächst wesentliche Frage betrifft jedoch das frühe Stadium der Plasmoiddynamik. Da die Plasmoidformation und -evolution allgemein als Rekonnexionsprozesse verstanden werden, ist die erste Frage an das Modell, ob das klassische Rekonnexionskonzept des Merging (Kapitel 6) sich auf die Entwicklung in diesem Modell anwenden läßt.

Drei typische Feldlinien dieses Modells für $d = -70$ und $B_y = 200$ sind dargestellt in Bild 8.3. Dabei wurde auf die Darstellung der Feldlinien schweifwärts der fernen X-Linie verzichtet, da diese durch das frühe Stadium der Plasmoidentwicklung nur unwesentlich verschoben werden. Vor der fernen X-Linie

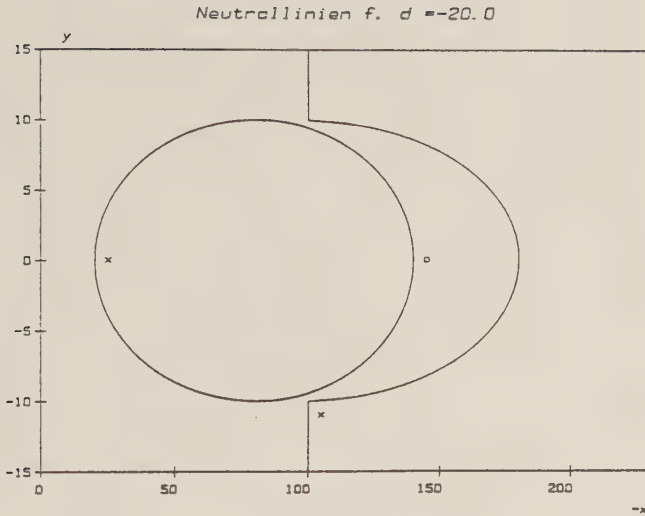


Bild 8.2c ($d = -20$)

hat sich eine Region spiralender Feldlinien gebildet, die eingebettet in ein Gebiet dipolartiger Feldlinien liegt. Offenbar sind die spiralenden Feldlinien ebenfalls dipolartig, da sie jeweils erdwärts an das Dipolfeld anschließen. Damit sind sowohl Plasmoidfeldlinien wie auch umgebendes Magnetfeld im Vasyliunas'schen Sinn von derselben Topologie. Dies impliziert, daß auch keine Separatrizen in dieser Phase existieren, die Feldregionen verschiedenen topologischen Typs voneinander trennen. Daher ist das Mergingbild hier nicht anwendbar. Separatoren und Separatrizen existieren nicht für jedes beliebig kleine $B_y \neq 0$. Daher ist die Definition von Merging strukturell instabil [Schindler *et al.*, 1988]. Hier ist also ebenfalls Bedarf für eine Verallgemeinerung des Rekonnexionsbegriffes.

Diese Erfahrung wird bestärkt bei der Betrachtung der Bilder 8.4 und 8.5. Hier sieht man, daß sich das Plasmoid aus vier verschiedenen Typen von Feldlinien zusammensetzt, nämlich Feldlinien, die topologisch dem Nord- oder Südlobe zuzurechnen sind (d.h., die die Nord- oder Südhalbkugel der Erde mit dem interplanetaren Magnetfeld verbinden), Feldlinien, die in beiden Richtungen mit dem interplanetaren

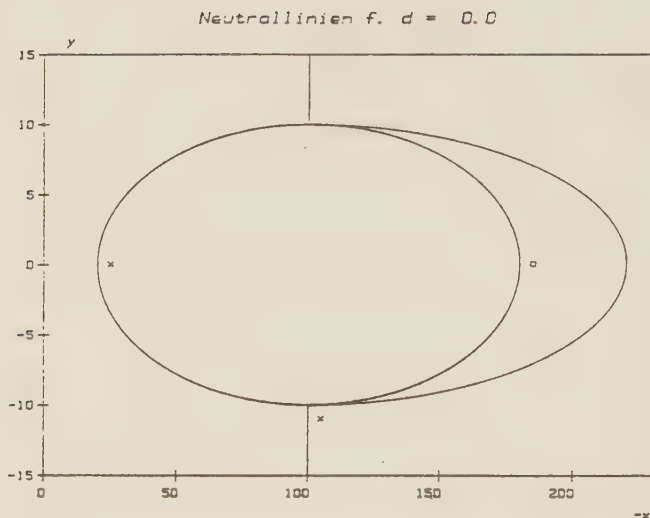


Bild 8.2d ($d = 0$)

Bilder 8.2 Lage der X- und O-Linien des Plasmoidmodells in der $z = 0$ Ebene für verschiedene Werte des Kontrollparameters d .

Feld verbunden sind und schließlich Feldlinien, die wieder dipolartig sind.

Bemerkenswert ist, daß der Übergang von dem frühen Stadium zu dem hier gezeigten in diesem kinematischen Modell keine Singularitäten von B benötigt. Also ist es offenbar möglich, magnetische Neuverbindungen herzustellen ohne singuläre Punkte des Magnetfeldes zu involvieren und Rekonnexion mit Merging zu erklären.

Die in Kapitel 7 eingeführte $B \neq 0$ -Rekonnexion ist jedoch anwendbar. Zunächst einmal folgt aus der Evolutionssequenz (Bilder 8.3-5), daß Rekonnexion in einer derartigen Entwicklung stattgefunden haben muß, denn das Plasmoid erzeugt sowohl neue Feldverbindungen quer zum Magnetosphärenschweif, als auch zwischen Plasmaelementen, die vormalig auf Dipolfeldlinien lagen, und dem interplanetaren Feld.

Weiterhin ist es zu erwarten, daß die kinematische Entwicklung, die durch zeitliche Variation des

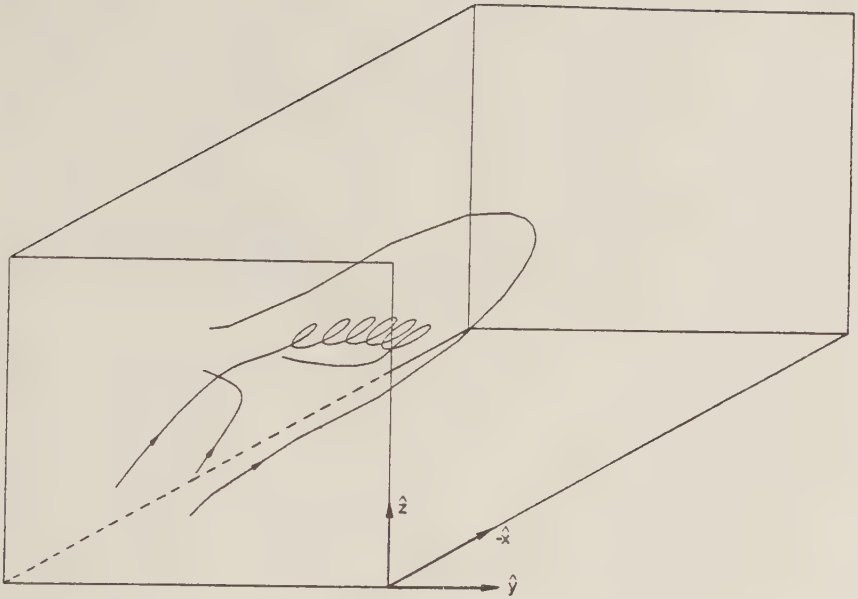


Bild 8.3 Drei typische Modellfeldlinien für $d = -70$. Die Rechtecke haben eine Ausdehnung von 50 Erdradien in y - und 17 Erdradien in z -Richtung. Die Länge des Gebietes in x -Richtung beträgt 110 Erdradien. Der Ursprung des im Text verwendeten Koordinatensystems liegt im Zentrum des vorderen Rechtecks. Die spiralende Plasmoidfeldlinie schließt genauso wie die anderen gezeigten Feldlinien an das Dipolfeld der Erde an.

Parameters d erzeugt wird, parallele elektrische Felder benötigt. Dabei lassen sich natürlich im Rahmen des kinematischen Modells höchstens qualitative Aussagen machen, da hier keine Information über das elektrische Potential verfügbar ist. Um trotzdem eine Aussage über das parallele elektrische Feld machen zu können wollen wir hier annehmen, daß die hier diskutierte Plasmoidevolution das Ergebnis einer resistiven Dynamik ist, d.h., daß im Ohm'schen Gesetz (3.1) die Nichtidealität R die Form (3.2) hat.

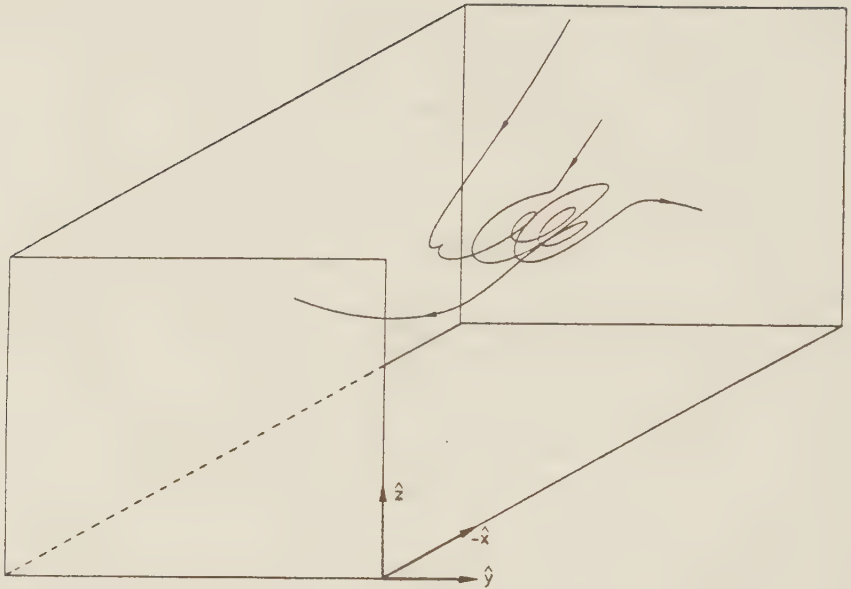


Bild 8.4 Typische Plasmoidfeldlinien zu einer späteren Entwicklungsphase ($d = -20$). Gezeigt ist aus Übersichtsgründen nur eine Lobe- und eine interplanetare Feldlinie. Die Dimensionen der Rechtecke sind dieselben wie in Bild 8.3; die Gebietsgröße in z -Richtung dagegen beträgt 210 Erdradien.

Damit erhalten wir aus (3.1)

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \quad (8.4)$$

oder

$$E_{\parallel} = \eta \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2} B = \eta j_{\parallel} \frac{B}{B} \quad (8.5)$$

Zur weiteren Vereinfachung sei die Resistivität η als konstant angenommen. Die Größe von $j_{\parallel} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} / B$ läßt sich aus dem Modell entnehmen. Bilder 8.6-8.9 zeigen die Verteilung des parallelen elektrischen Feldes, repräsentiert durch $j_{\parallel}$, in der Äquatorialebene ($z = 0$) für die kinematische Entwicklung. Hierbei

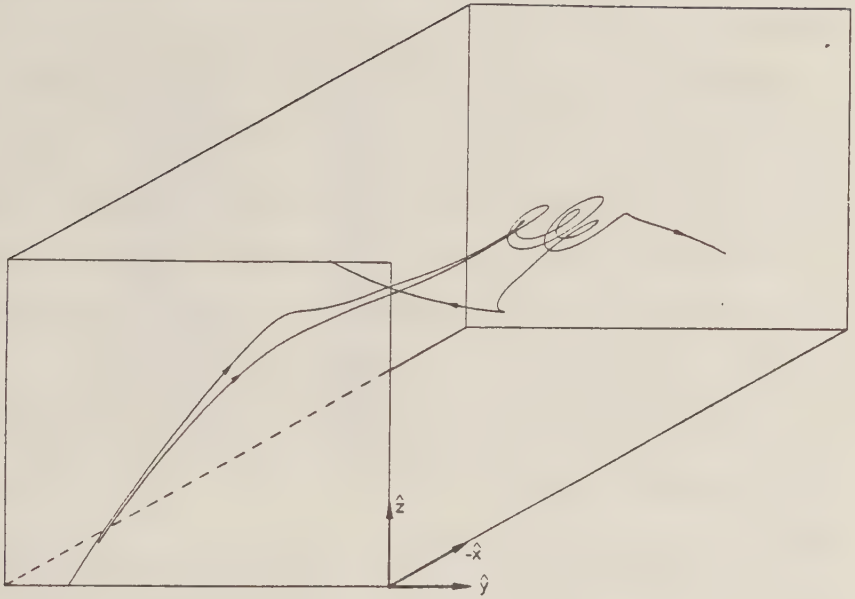


Bild 8.5 Typische Plasmoidfeldlinien für den Grenzfall $d = 0$. Bemerkenswert ist, daß das Plasmoid in diesem Stadium noch dipolartige Feldlinien enthält. Die Rechtecke haben dasselbe Format wie in den vorherigen Bildern, während die Gebietsgröße in x -Richtung hier 230 Erdradien beträgt.

wurde $B_y = 200$ gewählt.

Ein Vergleich mit Bildern 8.2 a-d ergibt, daß das parallele elektrische Feld im wesentlichen an und in der Umgebung der kritischen Linien des poloidalen Feldes konzentriert ist, so daß eine derartige Entwicklung fast ideal ablaufen kann, d.h. die Nichtidealität ist lokalisiert bezogen auf das Gesamtsystem der Magnetosphäre.

Die frühe Plasmoidentwicklung erfordert starke parallele elektrische Felder ($j_{\parallel} \approx 6.510^{-10} \text{ A m}^{-2}$) im wesentlichen an der erdnahen X-Linie und an der O-Linie (Bild 8.6). Die Konzentration von $E_{\parallel}$ an der

fernen X-Linie ist nötig für Rekonnexion von Lobe zu Dipolfeldlinien, die später zu Plasmoidfeldlinien neu verbunden werden können.

Diese Tendenz setzt sich fort, bis das poloidale Feld in der Mittelebene der Plasmoidflußröhre ($y = 0$) die in Bild 8.1 c) Form hat (Bild 8.7). Auch hier ist das parallele elektrische Feld sowohl an den erdnahen kritischen Linien als auch an der fernen X-Linie deutlich angehoben. Die Strukturen an der erdnahen X-Linie und der O-Linie entstehen dabei durch die spezielle Form der x - und y -Abhängigkeit von B und j und haben weiter keine physikalische Signifikanz. Die Variation von $j_{\parallel}$ in diesen Strukturen ist etwa von der Ordnung weniger Prozent des Maximalwertes von $j_{\parallel}$ an den kritischen Linien. Bild 8.10 belegt am Beispiel $d = -60$, daß das Magnetfeld und der Strom glatte Funktionen des Ortes sind.

In den teilabgelösten Stadien schwächt sich das parallele elektrische Feld in dem Bereich zwischen naher X-Linie und O-Linie um eine Größenordnung ab. Die wesentliche Konzentration von $E_{\parallel}$ und damit der Nichtidealität entfällt nach wie vor, abgesehen von der nahen X-Linie, auf die zum Plasmoid gehörenden kritischen Linien (Bilder 8.8 und 8.9).

Eine grobe Abschätzung eines Mittelwertes des resultierenden parallelen elektrischen Feldes läßt sich unter der Annahme erzielen, daß die magnetische Reynoldszahl $R = \mu_0 v L / \eta$ in dem System etwa 100 ist [z.B. *Birn*, 1984]. Nimmt man als typische Geschwindigkeit etwa eine Alfvéngeschwindigkeit (1000 km s^{-1}) und eine Skalenlänge des Systems von etwa vier Erdradien in z -Richtung an, so folgt eine typisches paralleles elektrisches Feld von $E_{\parallel, \text{typ.}} \approx 2 \times 10^{-4} \text{ V m}^{-1}$. Dieses elektrische Feld liegt etwa eine Größenordnung niedriger als beobachtete Maxima der elektrischen Felder in magnetosphärischen Rekonnexionsprozessen [z.B. *Nishida*, 1984]. Verstanden als Mittelwert liegt es jedoch in der richtigen Größenordnung.

Die Untersuchung der kinematischen Plasmoidevolution zeigt also, daß die Nichtidealität, hier ausgedrückt durch einen resistiven Term $R = \eta j$, in der Plasmoiddynamik in drei Dimensionen eine wesentliche Rolle spielen kann. Es ist weiterhin zu erwarten, daß parallele elektrische Felder dieser Art eine wichtige Rolle als Teilchenbeschleuniger spielen können.

Ein weiterer Aspekt der Plasmoidevolution in drei Dimensionen ist die Zusammensetzung des Plas-

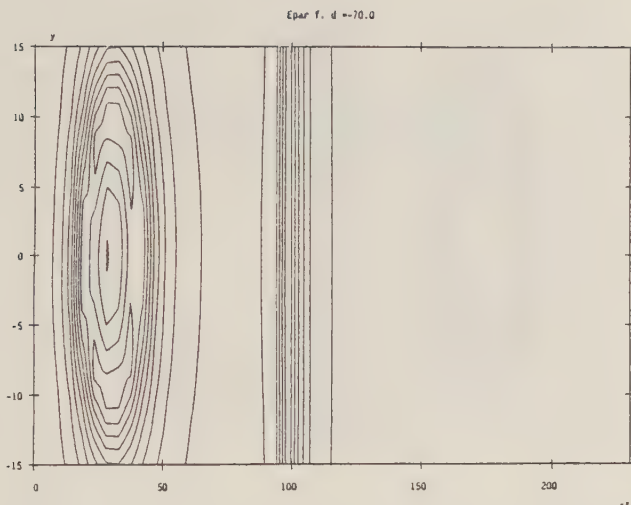


Bild 8.6 Linien konstanter paralleler Stromdichte in der kinematischen Entwicklung für $d = -70$. Die Maximalwerte von $j_{\parallel}$ an den kritischen Linien liegen bei $j_{\parallel} \approx 6.5 \cdot 10^{-10} \text{ A m}^{-2}$ und die Minimalwerte zwischen der O-Linie und der fernen X-Linie bei $j_{\parallel} \approx 7.3 \cdot 10^{-11} \text{ A m}^{-2}$

moids aus dipolartigen, Lobe- und interplanetaren Feldlinien. Diese Zusammensetzung ermöglicht es im Prinzip, feldlinienparallel Plasma in das Plasmoid oder aus dem Plasmoid heraus zu transportieren. Diese Möglichkeit ist grundsätzlich erst in dreidimensionalen Modellen vorhanden, da in zweidimensionalen Modellen Plasmoidfeldlinien geschlossen sind.

Zur detaillierten Untersuchung der Zusammensetzung der Feldlinientopologie wurden in der Äquatorialebene ($z = 0$) äquidistant Feldliniendurchstoßpunkte ausgewählt. Ausgehend von diesen Punkten wurden die zugehörigen Feldlinien bis zur $x = 0$ bzw. $x = x_{max}$ -Ebene integriert und die Durchstoßpunkte nach Feldlinientypen gekennzeichnet. Dabei war x_{max} stets größer als die größte schweifwärtige Ausdehnung der fernen X-Linie. In den folgenden Bildern bezeichnen "o" interplanetare, "*" dipolartige, "n" Nordlobe- und "s" Südlobefeldlinien. Gezeigt wird der halbe Plasmoidbereich der Äquatorialebene (die

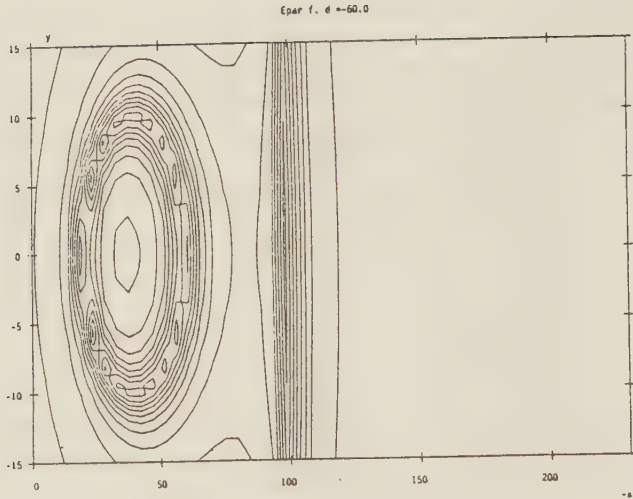


Bild 8.7 Linien konstanter paralleler Stromdichte in der kinematischen Entwicklung für $d = -60$. Die Extremalwerte von $j_{\parallel}$ stimmen mit denen von Bild 8.6 überein.

zweite Hälfte ergibt sich durch Spiegelung an der $y = 0$ -Linie und Vertauschen von "s" und "n") für festes $d = -10$ und verschiedene B_y .

Bild 8.11 zeigt die resultierende Topologieverteilung für $B_y = 200$. Man erkennt eine deutliche Trennung von Gebieten, die Feldlinien verschiedener Zugehörigkeit beinhalten. Aufgrund dieser Zerlegung läßt sich schließen, daß das Plasmoid als Flußspirale eine Unterstruktur von topologisch verschiedenen Flußröhren besitzt.

An dieser Stelle könnte der Verdacht auftreten, daß die Filamentierung eventuell mit den Substrukturen des parallelen elektrischen Feldes an den kritischen Linien korreliert ist (Bilder 8.6-8.9). Dies ist jedoch nicht der Fall, denn die Filamentierung ist einerseits eine Eigenschaft des Magnetfeldes allein, welches offensichtlich glatt ist und keinerlei kleinskalige Substrukturen besitzt (Bild 8.10), und andererseits ist die Skala der Strukturen des parallelen Stromes unabhängig von B_y , während die Filamentierung

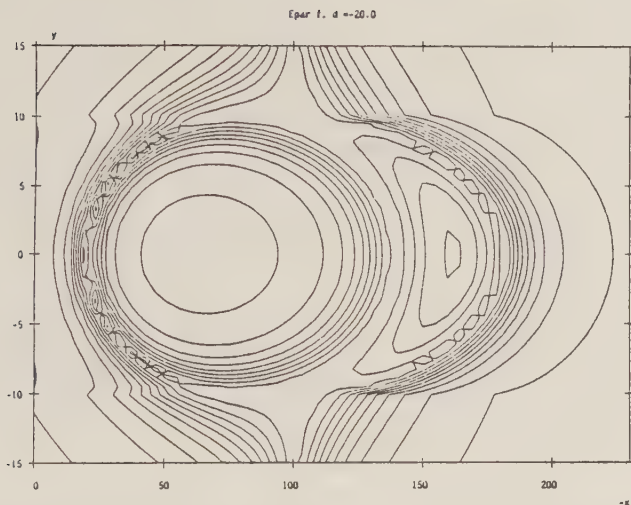


Bild 8.8 Linien konstanter parallele Stromdichte in der kinematischen Entwicklung für $d = -20$. Die Extremalwerte von $j_{\parallel}$ stimmen mit denen von $d = -70$ und $d = -60$ überein.

extrem stark von B_y abhängt, wie im folgenden gezeigt wird.

Verkleinert man B_y , so wird die Filamentierung feiner (Bilder 8.12-15), bis daß im Rahmen der durch das Gitter vorgegebenen Genauigkeit sich die Strukturen nicht mehr auflösen lassen (Bild 8.14).

Hier taucht die Frage auf, wie sich der Übergang vom dreidimensionalen zum zweidimensionalen, d.h., der Übergang $B_y \rightarrow 0$, in diesem Modell gestaltet. Zur Beantwortung dieser Frage wurden die Feldlinientypen der Durchstoßpunkte zwischen naher X- und O-Linie für festes d verschiedene Werte von B_y gezählt und in Bild 8.16 aufgetragen. Durch Extrapolation findet man, daß die Zahl der Lobefeldlinien mit B_y gegen Null geht. Daraus ist jedoch nicht der Schluß zu ziehen, daß dieser Übergang gleichmäßig erfolgt. Vielmehr wird auf immer kleinerem Gebiet eine immer größere Durchmischung erzielt, die im Grenzfall $B_y = 0$ unendlich groß auf einem Gebiet der Äquatorebene von der Fläche Null ist. Dieses Gebiet ist dann identisch mit der Durchstoßlinie der Separatrix des poloidalen Feldes.

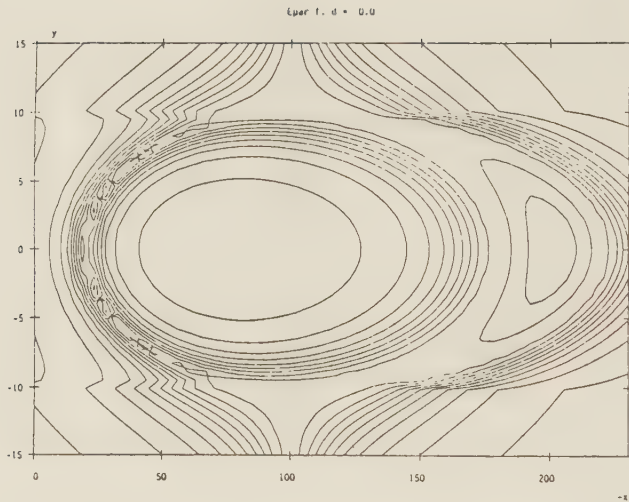


Bild 8.9 Linien konstanter paralleler Stromdichte in der kinematischen Entwicklung für $d = 0$. Der Bereich der $j_{\parallel}$ -Werte deckt sich auch hier mit dem Bereich der vorherigen Bilder.

Die Diskontinuität läßt sich verstehen in einer Hamilton-Schreibweise für die Feldlinien dieses Modells. Eine Hamilton-Formulierung für die Feldlinien von toroidalen Magnetfeldern wurde gefunden von *Elsässer*, [1986] und *Elsässer et al.* [1987]. In dem vorliegenden Modell treten aufgrund der Geometrie keine Probleme durch Wiederkehr von Feldlinien auf.

Für das Magnetfeld gilt

$$B_x = -\frac{\partial A(x, y, z)}{\partial z} \quad (8.6a)$$

$$B_z = \frac{\partial A(x, y, z)}{\partial x} \quad (8.6b)$$

und B_y konstant. Mit der Differentialgleichung für Feldlinien

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (8.7)$$

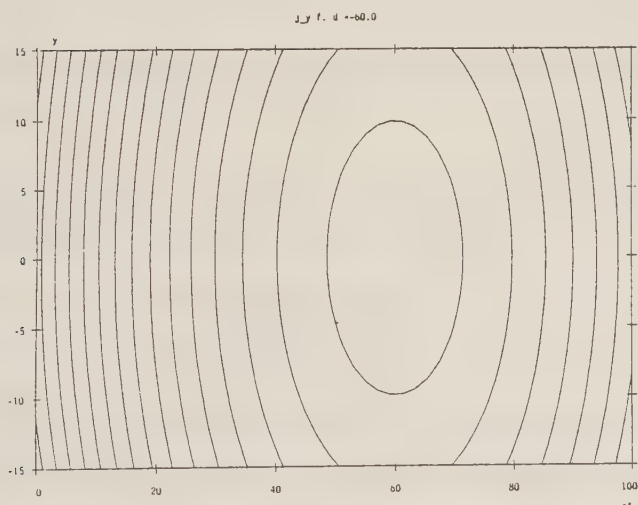
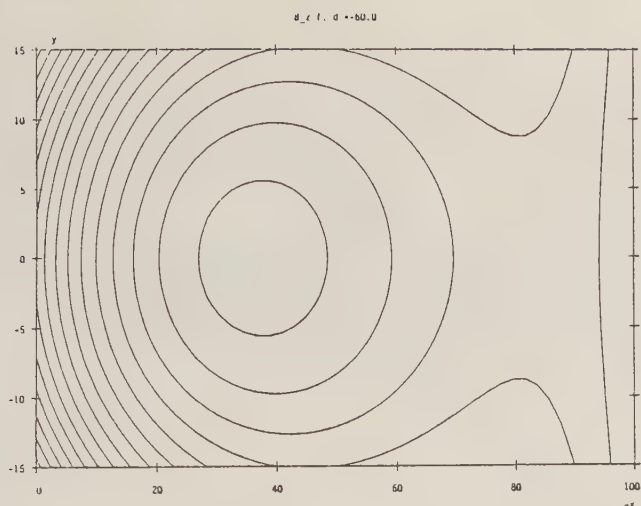


Bild 8.10 Linien gleicher z -Komponente des Magnetfelds (obere Hälfte) und gleiche y -Komponente der Stromdichte (untere Hälfte) in der $z = 0$ -Ebene. Die Bilder zeigen, daß B_z und j_y glatte Funktionen des Ortes sind.

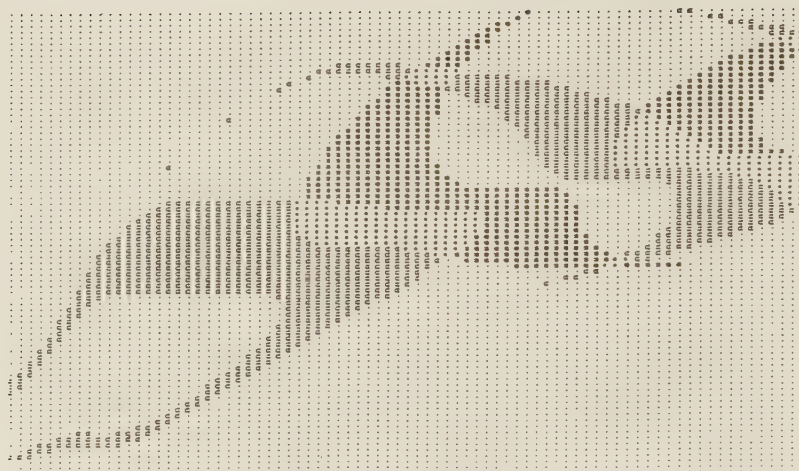


Bild 8.11 Kennzeichnung der Durchstoßpunkte in der $z=0$ -Ebene gemäß der Topologie der zugehörigen Feldlinie für $B_y = 200$. Von rechts nach links ist die y -Richtung und von oben nach unten die x -Richtung aufgetragen.

folgt sofort, daß y/B_y als Wegparameter τ gewählt werden kann. Eingesetzt in (8.6) ergeben sich Hamilton'sche Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{\partial A(x, B_y s, z)}{\partial z} \quad (8.8a)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial A(x, B_y s, z)}{\partial x} \quad (8.8b)$$

wobei z der kanonische Impuls und x der kanonische Ort ist. Es handelt sich hier also um ein eindimensionales nichtautonomes Hamiltonsystem, welches für kleines B_y nur schwach von der kanonischen Zeit τ abhängt. Damit ist dann für relativ große τ die Querschnittsfläche der Spirale einer Plasmoidfeldlinie eine adiabatische Invariante. Für eine jede Trajektorie bricht jedoch die Adiabasie dieser Fläche zusammen sobald sie in die Umgebung der Separatrix des poloidalen Feldes kommt. An dieser Separatrix wird die Trajektorie phasenabhängig in den Bereich $z > 0$ oder $z < 0$ eintreten. Die dadurch entstehende Aufweitung der Separatrix geht mit B_y gegen Null, jedoch nicht die Phasenabhängigkeit der engültigen

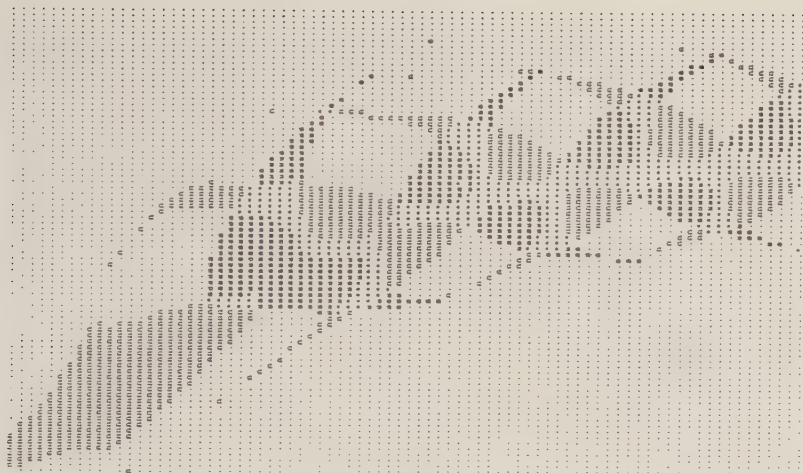


Bild 8.12 Kennzeichnung der Durchstoßpunkte in der $z = 0$ -Ebene gemäß der Topologie der zugehörigen Feldlinie für $B_y = 100$.

Austrittsrichtung. Da im Fall $B_y = 0$ überhaupt kein Austritt mehr stattfindet, ist der Grenzübergang analog zum Auftreten von Chaos in toroidalen Systemen nicht regulär.

Bei kleinerem aber endlichem B_y tritt im gesamten Plasmoidbereich eine starke Durchmischung der Feldlinientopologie auf, die aufgrund der endlichen Larmorradien der Ionen (ca. 1 Erdradius, d.h. eine Längeneinheit) zu einer Durchmischung des Plasmas führen können, welches etwa feldlinienparallel in die Plasmoidstruktur transportiert wurde. Dieser Effekt ist besonders betont für relativ kleine B_y und kann dann möglicherweise auch Elektronen vermischen. Allerdings vergrößert eine Verringerung von B_y den Spiegeleffekt (das Plasmoid hat die Wirkung einer magnetischen Flasche), so daß das Plasma innerhalb der Flußröhre effektiver gefangen ist. In einem Zwischenbereich würde eine derartige Durchmischung insbesondere implizieren, daß Plasma aus der Plasmaschicht entlang der Feldlinien aus dem Plasmoid entweichen kann und außerhalb des Plasmoide und eventuell sogar in den Lobes der Magnetosphäre beobachtbar sein müßte. In der Tat gibt es Beobachtungen eines Wärmestroms genau außerhalb des

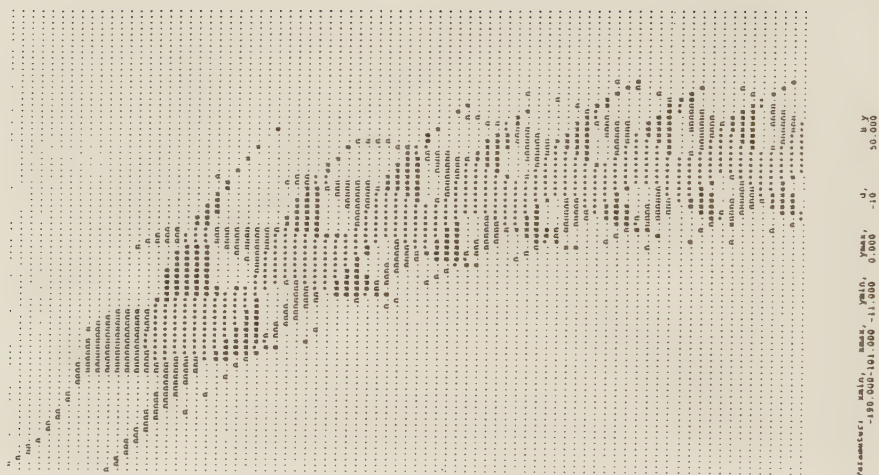


Bild 8.13 Kennzeichnung der Durchstoßpunkte in der $z=0$ -Ebene gemäß der Topologie der zugehörigen Feldlinie für $B_y = 50$.

Plasmoids [Hones et al., 1984; J. Birn, Los Alamos, private Mitteilung, 1988], der auf entwichene Elektronen hinweisen könnte und es sind in jüngster Zeit in den Lobes Beobachtungen von filamentartigen Strukturen von Plasma aus der Plasmaschicht gemacht worden [Huang et al., 1987].

Diese Resultate deuten darauf hin, daß, trotz seiner Einfachheit, aus diesem kinematischen Modell durchaus generische Eigenschaften realistischerer dynamischer Modelle und damit auch der Vorgänge in der Natur abgeleitet werden können. Die Erstellung eines kinematischen Modells erscheint insbesondere deshalb sinnvoll, weil bis heute numerische dynamische Rechnungen dreidimensionaler Konfigurationen aufgrund der erforderlichen Computerkapazität nur lokal oder global mit sehr geringer Auflösung möglich sind. In diesem Sinn ist daher zur Zeit ein kinematisches Modell, das die relevanten Informationen über Feldtopologie aus sowohl Beobachtung wie zweidimensionaler Simulation enthält, der einzige Weg, ein Bild der Plasmoidentwicklung in drei Dimensionen zu erstellen.

Das Modell will nicht den Anspruch erheben, sich exakt in dieser Form durch dynamische Rechnungen

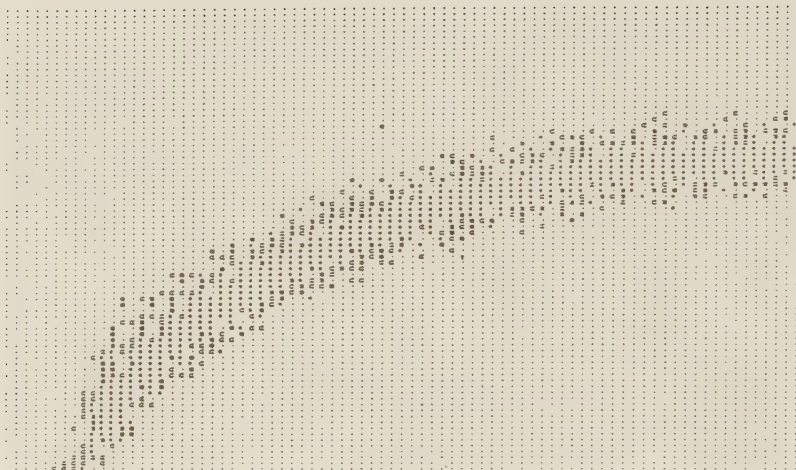


Bild 8.15 Kennzeichnung der Durchstoßpunkte in der $z=0$ -Ebene gemäß der Topologie der zugehörigen Feldlinie für $B_y = 10$.

Parameter: min , max , year , Q , BY
 -190.000-101.000 -11.000 -10 10.000

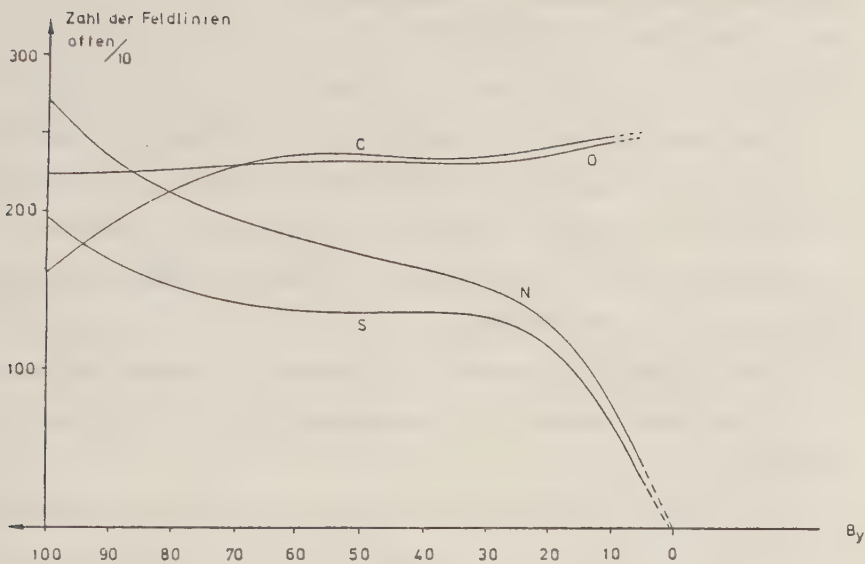


Bild 8.16 Verteilung der Feldlinientopologie auf die Durchstoßpunkte in Abhängigkeit von B_y für $d = -10$. Die Zahl der offenen Feldlinien ist durch 10 dividiert.

9. Ein konzeptionelles Modell für $B \neq 0$ -Rekonnexion an der Magnetopause und Flux-Transfer Events

Seit ihrer Entdeckung [Haerendel, 1978, Russell and Elphic, 1978, 1979] sind Flux-Transfer Events zum Ziel vieler Untersuchungen geworden [z.B. verschiedene Arbeiten aus Hones, 1984]. Flux-Transfer Events (FTEs) werden heutzutage verstanden als Indiz oder Mittel für neue Art der Rekonnexion an der Magnetopause, die alternativ zu globaler $B=0$ -Rekonnexion, welche an der Magnetopause ebenfalls von Bedeutung ist [Sonnerup, 1981, 1984], gesehen wird.

Eine Zusammenfassung der Eigenschaften von 15 FTEs wurde von Paschmann *et al.* [1982] gegeben. Paschmann betont, daß Signaturen von X-Linien Rekonnexion selten im Zusammenhang mit FTEs beobachtbar sind.

Da die heute verfügbaren Beobachtungen i.a. nur auf den Daten eines einzelnen Satelliten beruhen, ist man, was die exakten Ausmaße, die Form und die Lage eines FTEs relativ zur Magnetopause angeht, auf indirekte Evidenz oder Modellvorstellungen angewiesen. Ein FTE wird heute gesehen als eine Flußröhre von spiralenden Feldlinien, etwa analog zu der Wicklung eines Taues, die entweder an oder nahe bei der frontseitigen Magnetopause lokalisiert ist. Zur Unterscheidung von gewöhnlichen Flußröhren, die nicht unbedingt aus spiralenden Feldlinien bestehen müssen, sei eine Flußröhre mit spiralenden Feldlinien künftig als Flußspirale bezeichnet.

Der Querschnitt einer solchen Flußspirale ist oval mit etwa zwei Erdradien Durchmesser in Nord-Süd und einem Erdradius Durchmesser in der Richtung senkrecht zur Magnetopause [z.B. Saunders *et al.*, 1984]. Diese Autoren schätzten die Geschwindigkeit der gesamten Flußspirale in Nord-Süd Richtung entlang der Magnetopause zu etwa 100 km/s.

An Modellvorstellungen existieren zur Zeit zwei wesentliche Ideen (Bild (9.1)). Die eine wurde von Russell und Elphic [1979] zur Erklärung ihrer Beobachtungsergebnisse vorgestellt. Ebenso wie ein neueres, von Lee und Fu [1985, 1986] vorgeschlagenes Modell nimmt das Russell und Elphic Modell an, daß Flußspiralen als ganzes die Magnetosphäre mit der Magnetosheath verbinden, d.h., daß alle

Feldlinien einer FTE-Flußspirale denselben Typ haben. Aus globalen topologischen Gründen impliziert die Existenz einer solchen Flußspirale die einer zweiten mit der umgekehrten Verbindung [Sonnerup, 1987]. Die Untersuchungen zu allgemeineren dreidimensionalen Plasmoidstrukturen (Kapitel 8) zeigten jedoch eine filamentartige Verbindung zum umgebenden Feld.

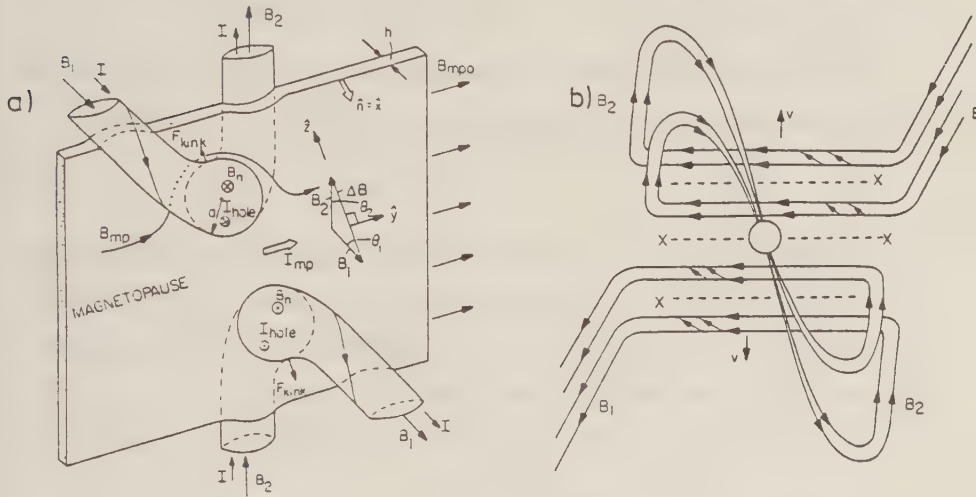


Bild 9.1 Schematische Darstellung der beiden aktuellen FTE Modelle. Teil a) zeigt schematisch das Russell und Elphic Modell und Teil b) das Lee und Fu Modell (von Sonnerup, [1987]).

Im Unterschied zu Russell und Elphic modellieren Lee und Fu die Entstehung einer FTE Flußspirale. Der dazu herangezogene Prozeß ist Tearing an der Magnetopause. Spiralende Feldlinien können nach Auffassung von Lee und Fu dadurch entstehen, daß Tearing mehrere X-Linien erzeugt, zwischen denen geeignete Bedingungen für Flußspiralen existieren. Diese Vorstellung steht jedoch im Widerspruch zu den oben angeführten Beobachtungen, die selten Signaturen von X-Linien Rekonnexion zeigen.

Das in diesem Kapitel vorgestellte einfache kinematische FTE Modell soll versuchen, Alternativen zu dem eben erwähnten aufzuzeigen. Ein Ziel ist es, eine FTE Struktur zu entwickeln, die keine X-Linien

besitzt. Weiterhin soll untersucht werden, wie die Verbindung einer einfachen Flußspirale zur Magnetosphäre bzw. zur Magnetosheath in einfachst möglicher Weise aussehen kann und, ob die topologische Struktur einer derartigen Verbindung nach wie vor die simultane Existenz von zwei FTEs erfordert. Dieses wird dann im Zusammenhang zu allgemeiner magnetischer Rekonnexion gesehen werden und es wird gezeigt werden, daß allgemeine magnetische Rekonnexion das geeignete Mittel zur Beschreibung von Rekonnexion in FTEs sein kann.

Zu diesem Zweck wird das Magnetfeld in einer kleinen Umgebung eines Bereichs der Magnetopause analog zu dem Plasmoidfeld aus Kapitel 8 vorgegeben durch eine Flußfunktion $A(x, y, z)$, so daß

$$\mathbf{B} = \nabla A(x, y, z) \times \mathbf{e}_y + B_y \mathbf{e}_y \quad (9.1)$$

Die verwendeten Koordinaten sind als lokale Koordinatendarstellung zu verstehen. Die lokale Magnetopause wird modelliert durch eine Harris Schicht [Harris, 1964], die in der $y-z$ -Ebene liegt. Überlagert wird ein konstantes B_y , welches eine Verscherung des Magnetfeldes erzeugt und ein poloidales Störfeld, welches lokal eine Spiralstruktur des Magnetfeldes erzeugt.

Um die Störung sehr stark im Raum zu lokalisieren, wird die Flußfunktion A vorgegeben als

$$A(x, y, z) = -B_0 \ln \cosh(2x) + \epsilon \frac{B_0}{\left(\left(\frac{y}{5}\right)^2 + 1\right)^2 [8(x^4 + z^4) - 2x^2 + 1]} \quad (9.2)$$

Hierbei ist $B_0 = 15$ eine Konstante, die die Amplitude des Feldes bestimmt und ϵ ein Parameter, der das Einschalten des poloidalen Störfeldes erlaubt. Mit dieser Flußfunktion erhält man für das Magnetfeld

$$B_x = \epsilon \frac{32B_0 x^3}{\left(\left(\frac{y}{5}\right)^2 + 1\right)^2 [8(x^4 + z^4) - 2x^2 + 1]^2} \quad (9.3a)$$

$$B_y = \text{const} \quad (9.3b)$$

$$B_z = \epsilon \frac{B_0(32x^3 - 4x)}{\left(\left(\frac{y}{5}\right)^2 + 1\right)^2 [8(x^4 + z^4) - 2x^2 + 1]^2} - 2B_0 \tanh(2x) \quad (9.3c)$$

Die Skalierung der Feldstärke ist so gewählt, daß sie in etwa der Feldstärke an der Magnetopause, gemessen in nT, entspricht. Ein für die spätere Diskussion wesentlicher Gesichtspunkt ist die Eigenschaft des Feldes

(9.3), keine Neutralpunkte zu besitzen. Dieses Magnetfeld ist durch die Abhängigkeit von der Koordinate y offensichtlich dreidimensional.

Im Folgenden soll die Frage der Verbindung der Flußspiralenfeldlinien zu dem umgebenden Feld untersucht werden. Dazu zeigen Bilder (9.2) a) und b) insgesamt 10 typische Feldlinien des Modells für $B_y = 20$. Je drei davon gehören zum Magnetosheath (südwärtige Richtung) bzw. zur Magnetosphäre (nordwärtige Richtung). Die Magnetopause liegt in der $z = 0$ -Ebene des Würfels.

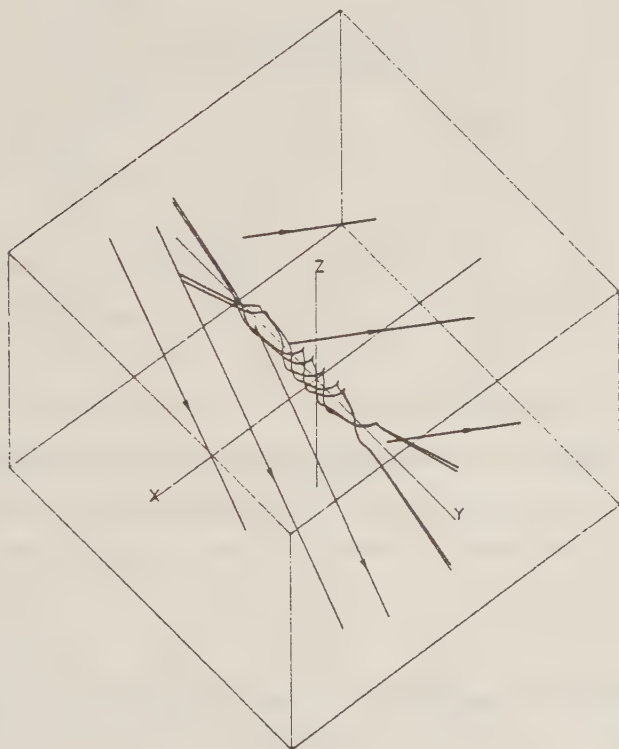


Bild 9.2 a Blick von oben

In der FTE Struktur sind alle vier möglichen Feldtopologien realisiert, d.h., die Flußspirale besteht

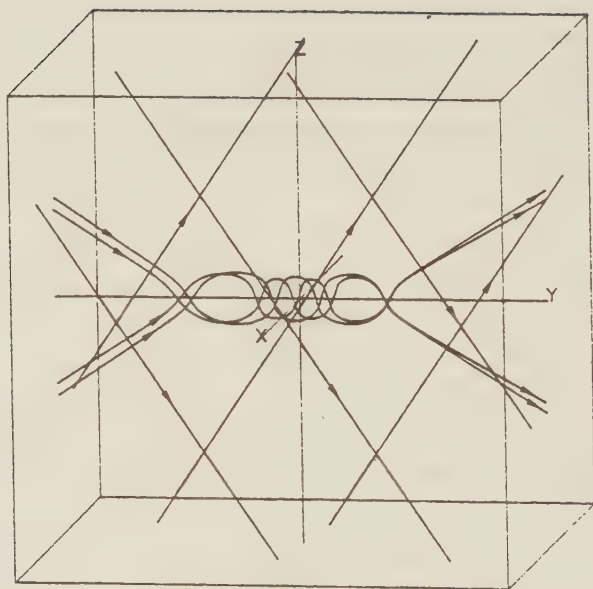


Bild 9.2 b Blick von der Magnetosheath

Bild 9.2 Typische Feldlinien des Flußspiralenmodells für $B_y = 20$. Teil a) zeigt den Blick von oben und Teil b) etwa von der Magnetosheath aus. Es ist zu erkennen, daß das Modell-FTE aus vier verschiedenen Typen von Feldlinien besteht. Der die Flußspirale umschließende Würfel hat eine Kantenlänge von 20 Einheiten.

aus Feldlinien, die die Magnetosphäre mit sich selbst oder der Magnetosheath, und die Magnetosheath mit sich selbst oder der Magnetosphäre verbinden.

Damit konstituiert eine derartige Flußspirale eine neue Verbindung vor allem zwischen beiden Seiten der Magnetopause. Derartige Neuverbindungen wurden bisher vorherrschend im Zusammenhang mit Rekonnexion an Neutralpunkten oder Neutrallinien diskutiert, während hier *keine* Neutralpunkte

des Magnetfeldes innerhalb des betrachteten Gebietes existieren. Daher stellt eine Flußspirale an der Magnetopause eine neue Möglichkeit zur Öffnung der Magnetosphäre dar.

Eine weitere Eigenschaft dieses einfachen Modells ist, die Existenz eines einzelnen FTEs zu ermöglichen. Diese Eigenschaft folgt aus der topologischen Zusammensetzung der vorgestellten Flußspirale. Wenn durch das Einbringen einer Flußspirale zum Beispiel Magnetosheathfluß aufgetrennt und mit Magnetosphärenfluß neuverbunden wird, so wird anders herum simultan Magnetosphärenfluß mit Magnetosheathfluß durch die Flußspirale selbst ebenfalls neuverbunden. Die übrigen Enden werden durch das durch die Flußspirale hervorgerufene Drapieren des umgebenden Feldes neuverbunden. Daher bleiben nicht, wie bei einer einzelnen Flußspirale des *Russell* und *Elphic* Modells, offene 'Feldlinienenden' zurück, die vermittels einer weiteren Flußspirale miteinander verbunden werden müssen.

Die topologische Zusammensetzung des Magnetfelds der Flußspirale gibt außerdem eine Erklärung der beobachteten Plasmazusammensetzung innerhalb eines FTEs. *Paschmann et al.* [1982] und *Daly et al.* [1984] beobachteten nämlich eine Mischung von magnetosphärischem und Magnetosheathplasma im Zentrum der Struktur. Im Rahmen dieses Modells können die verschiedenen Typen von Plasma prinzipiell feldlinienparallel in das FTE eintreten.

Ein weiteres schon eingangs erwähntes Argument dafür, daß FTEs Gemeinsamkeiten mit Flußspiralen wie in diesem Modell haben, ist das Fehlen von X-Linien in dem Modell, so daß die dynamische Entwicklung einer solchen Feldkonfiguration keine X-Linien Rekonnexionssignaturen zeigen würde.

Der letzte Punkt führt zur Frage magnetischer Rekonnexion in derartigen Strukturen. Wie schon beim Plasmoid (Kapitel 8) ist auch hier Merging kein anwendbares Rekonnexionskonzept, allein schon weil das Modellfeld keine X-Linien besitzt und sich eventuell vorhandene Separatoren beliebig schwer finden lassen (s.u.). Da aber ein jeder Prozeß, der eine solche FTE Struktur an der Magnetopause erschafft, aufgrund deren topologischer Eigenschaften automatisch ein Rekonnexionsprozeß sein muß, ist auch hier $B \neq 0$ -Rekonnexion die geeignete Beschreibung.

Die Bedeutung von parallelen elektrischen Feldern bei der Formation einer Flußspirale soll hier, anders als in Kapitel 8, durch Berechnung der verallgemeinerten magnetischen Helizität (7.23) geschehen.

Diese Vorgehen bietet sich aufgrund der strikten Lokalisierung der Flußspirale an.

Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß zu einer fiktiven Zeit $t = 0$ eine ungestörte Magnetopause vorliegt ($\epsilon = 0$ in (9.3)). Zur Zeit $t = t_1$ sei durch irgendeinen spontanen Prozeß eine Flußspirale entstanden ($\epsilon = 1$). Dann kann die verallgemeinerte magnetische Helizität benutzt werden, um eine Abschätzung über die mittlere Stärke des parallelen elektrischen Feldes zu erhalten, das für den Formationsprozeß erforderlich war.

Die verallgemeinerte magnetische Helizität war definiert als

$$\bar{K}(t) = \int_V (\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}_0) \cdot (\mathbf{B}(t) - \mathbf{B}_0) dV \quad (9.4)$$

Man erhält nun leicht eine Abschätzung für ein typisches $E_{\parallel}$ durch

$$E_{\parallel} \Delta t \approx \frac{|\bar{K}(t)|}{2V_T B_T} \quad (9.5)$$

Hier bezeichnet Δt die Formationszeit der Flußspirale, V_T ein typisches Volumen des Systems und B_T eine typische Magnetfeldstärke. Da für V_T ein Systemvolumen eingesetzt wird und nicht etwa das unbekannte Volumen der nichtidealen Region, ist (9.5) eine Abschätzung nach unten. Bei dieser Abschätzung gehen also nur die Endzustände des Magnetfeldes ein und nicht Details dessen Entwicklung.

Einsetzen der Gebietsgröße in Erdradien, einem typischen Magnetfeld von 30 nT und numerische Auswertung des Integrals (9.4) ergibt

$$E_{\parallel} \Delta t \gtrsim 4 \times 10^{-3} \text{Vs/m} \quad (9.6)$$

ein Wert, der durchaus realistisch ist [G. Siscoe, University of California, private Mitteilung].

Eine im Vergleich zum Plasmoidmodell (Kapitel 8) noch hervorstechendere Eigenschaft des FTE Modells ist die Komplexität der topologischen Substruktur schon für realistische Werte der Magnetfeldkomponente $B_y \sim 40 \text{nT}$ und besonders im Grenzfall $B_y \rightarrow 0$.

Zum Zweck der Untersuchung dieser Substrukturen wurden Feldlinien des Flußspirale Modells für verschiedene Werte von B_y integriert und ihre Durchstoßpunkte durch vorgegebene Ebenen nach dem

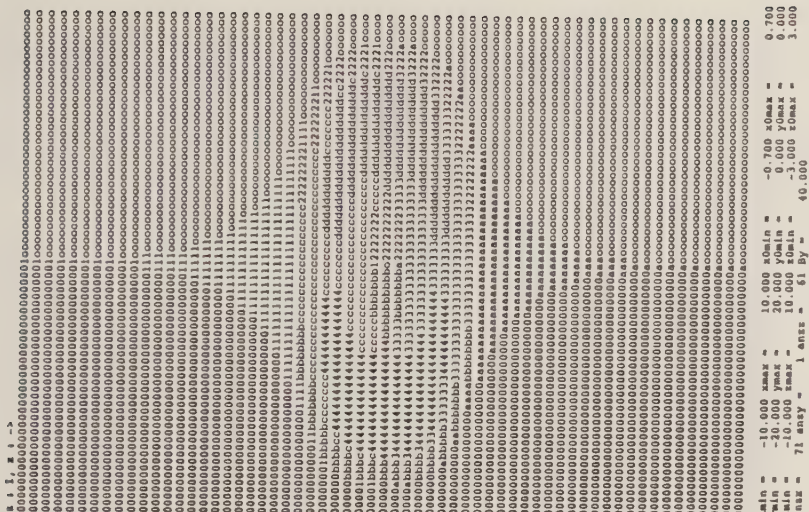


Bild 9.3 a Klassifikation der Durchstoßpunkte durch die $y = 0$ -Ebene nach Feldlinientopologie für $B_y = 40$. Die Werte von " x_{min} "-" z_{max} " bezeichnen die Größe des gewählten Integrationsgebietes während " x_{0min} "-" z_{0max} " die Lage der Durchstoßpunkte, deren Anzahl in der jeweiligen Koordinatenrichtung durch die Parameter " $anzx$ "-" $anzz$ " festgelegt, bestimmt.

topologischen Typ der jeweiligen Feldlinie gekennzeichnet, ähnlich wie im vorherigen Kapitel. Eine resultierende Sequenz für die $y = 0$ -Ebene ist dargestellt in Bild (9.3) a)-d).

Dabei bezeichnen die Buchstaben "a" bis "i" Feldlinien, welche bei $x > 0$, also auf der Magneto-sheathseite, das Gebiet verlassen und die $x = 0$ Ebene einmal ("a") bis neunmal ("i") durchstoßen haben. Alle Feldlinien mit ungerader Durchstoßzahl sind bei $x < 0$, also von der Magnetosphärenseite, in das Gebiet eingetreten. Aus Darstellungsgründen werden Feldlinien, die bei $x > 0$ das Gebiet verlassen und mehr als neunmal die $x = 0$ Ebene gekreuzt haben, mit "+" bezeichnet, wenn sie eine Verbindung quer zur Magnetopause etablieren und sonst mit "s".

Feldlinien, die das Gebiet bei $x < 0$ verlassen werden in analoger Weise entsprechend ihrer Durch-

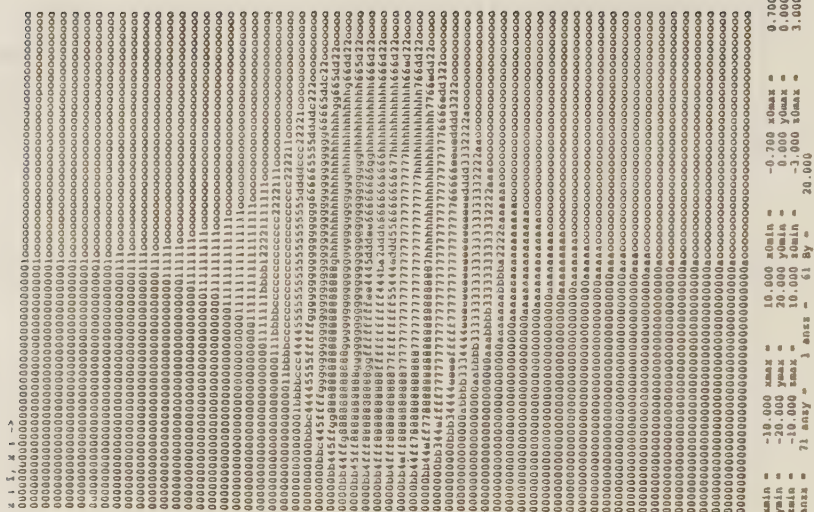


Bild 9.3 b Klassifikation der Durchstoßpunkte durch die $y = 0$ -Ebene nach Feldlinientopologie für

$B_y = 20$.

stoßzahl mit den Zahlen "1" bis "9" codiert. Entsprechend werden sie für höhere Durchstoßzahlen mit "-." gekennzeichnet, wenn sie eine Querverbindung herstellen, und sonst mit "n".

Damit bleiben nur Feldlinien, die die $x = 0$ Ebene überhaupt nicht schneiden. Diese werden, wenn sie zur Magnetosheath gehören, mit "o" und sonst mit "0" gekennzeichnet.

Bilder 9.3 zeigen eine wachsend komplizierte Substruktur der Flußspirale, wobei bereits ab $B_y = 10$ die Durchstoßzahlen einzelner Feldlinien über neun liegen, so daß sie nicht mehr aufgelöst werden können. Die Bilder zeigen deutlich die Zusammensetzung der Flußspirale aus Feldlinien verschiedenen topologischen Typs. Wie oben schon angedeutet, erlaubt diese Eigenschaft die Interpretation, daß Plasma, etwa aufgrund endlicher Larmorradien, Feldlinientopologie wechseln kann.

Bemerkenswert ist, daß, im Gegensatz zum Plasmoidmodell, das Gebiet, auf dem eine Mischung von topologisch verschiedenen Feldlinien vorliegt, nicht mit B_y verschwindet, sondern statt dessen den

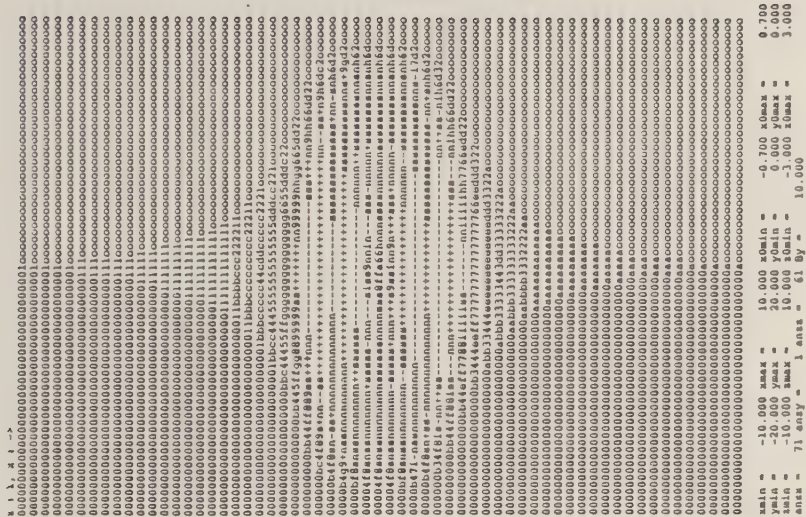


Bild 9.3 c Klassifikation der Durchstoßpunkte durch die $y = 0$ -Ebene nach Feldlinientopologie für

$$B_y = 10.$$

ganzen Querschnitt der Flußspirale einnimmt. Damit liegt die Vermutung nahe, daß sich für kleine B_y eine praktisch chaotische Mischung von Feldlinientopologien innerhalb der FTE-Struktur einstellt.

Für endliches B_y läßt sich diese Eigenschaft wie folgt quantifizieren:

Eine typische mittlere Zahl der Umläufe ist

$$\tilde{n} = \frac{B_p^i \Delta y}{2\pi r_p^i B_y} \frac{1}{B_y} \quad (9.7)$$

Hierbei ist B_p^i ein typisches poloidales Magnetfeld, Δy die Länge der Flußspirale, und r_p^i ein typischer Radius der Querschnittsfläche einer spiralenen Feldlinie. Eine typische Zahl von Durchstoßpunkten einer Feldlinie durch die Magnetopause ist das doppelte davon

$$n = 2\tilde{n} \quad (9.8)$$

Dennoch bleiben zwei offensichtliche Ordnungsprinzipien über. Aus Symmetriegründen ($B(y) = B(-y)$) muß nämlich für jedes endliche B_y jede Feldlinie auf der Geraden $x = y = 0$ eine ungerade Anzahl vom Durchstoßpunkten durch die $x = 0$ Ebene zeigen. Analog darf der Teil der Geraden $y = z = 0$, der innerhalb der Flußspirale liegt, nur aus Feldlinien gerader Durchstoßzahl bestehen. Das zweite Ordnungsprinzip folgt aus einer weiteren Symmetrieüberlegung. Da die Trajektorien symmetrisch in Bezug auf die Mittelachse der Flußspirale sind, müssen Feldlinien, deren Durchstoßpunkte in der $y = 0$ Ebene symmetrisch zum Koordinatenursprung liegen, entweder beide Querverbindungsfeldlinien oder Feldlinien mit gerader Durchstoßzahl sein. In beiden Fällen stimmt die Durchstoßzahl überein. Innerhalb dieser Unterscheidung sind jedoch Feldlinien mit gegenüberliegenden Durchstoßpunkten vom entgegengesetzten Typ, d.h., es liegen im Rahmen der oben eingeführten Notation stets Zahlen gegenüber von Buchstaben.

Damit genügt es, einen einzelnen Quadranten in der $y = 0$ Ebene zu betrachten. In diesem Quadranten stellt sich eine Verteilung von Querverbindungs- und anderen Feldlinien ein. Dieses Verteilung wird um so komplizierter, je kleiner B_y wird.

Für jedes endliche B_y läßt sich die auftretende Struktur erklären. Es existieren dann nämlich glatte Linien, die durch Abtrennen von Gebieten Regionen verschiedener Feldtopologien festlegen.

Für endliches, festes B_y und vorgegebene, hinreichend kleine gerade Durchstoßzahl existiert auf der Linie $z = y = 0$ mindestens ein Punkt, wo eine Feldlinie diese vorgegebene Durchstoßzahl besitzt und außerdem zum Beispiel topologisch zur Magnetosheathseite gehört. Aus Stetigkeitsgründen (für endliches B_y ist das Feld integrierbar) existiert um diesen Punkt in der $x-z$ Ebene eine Umgebung, wo Feldlinien mit derselben Eigenschaft liegen. Diese Umgebung wird begrenzt durch Feldlinien, welche in mindestens einer Richtung asymptotisch in der $x = 0$ Ebene liegen. Jenseits dieser Grenze liegt ein Bereich von Feldlinien, die eine um eins oder zwei kleinere Durchstoßzahl haben. Die Feldlinien mit um eins geringerer Durchstoßzahl liegen in einem Gebiet, welches einen Teil der $x = y = 0$ Achse beinhalten muß, wie aus einer Umkehrung der Argumentation folgt.

Diese Symmetrieüberlegungen lassen sich im Rahmen einer Untersuchung der durch das Magnetfeld

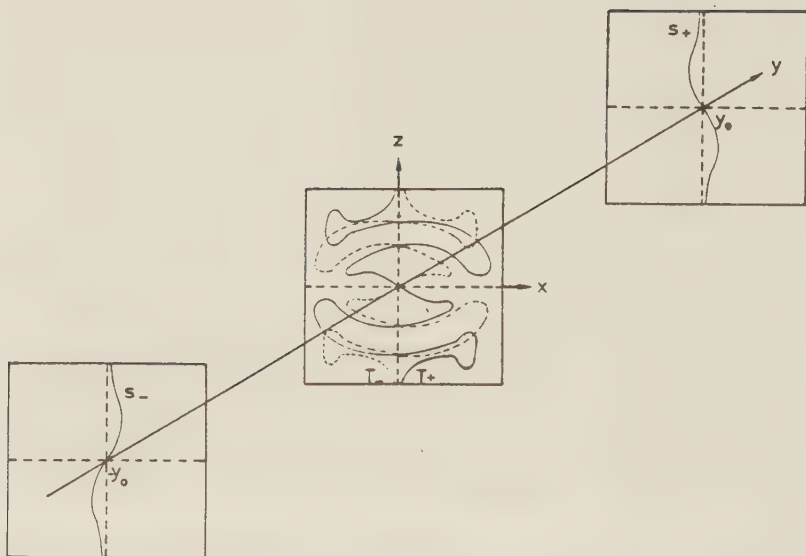


Bild 9.4 Illustration zum Beweis der Trennung der verschiedenen Feldlinientopologien. Skizziert ist der prinzipielle Verlauf der im Text erklärten Trennungslinien T^+ und T^- in der $y=0$ -Ebene und der dazugehörige Verlauf der Linien S^+ und S^- in den Ebenen $y=y_0$ und $y=-y_0$.

definierten Abbildung verstehen. Die Argumentation benutzt Bild (9.4).

Sei y_0 so groß, daß im Gebiet $y > y_0$ keine Feldlinie mehr als einen Durchstoßpunkt durch die $x=0$ Ebene besitzt. Wegen der Lokalisierung des poloidalen Feldes ist y_0 endlich. Aus Symmetriegründen ist dieselbe Bedingung an die Durchstoßzahl im Gebiet $y < y_0$ erfüllt. In den Ebenen $y=y_0$ und $y=-y_0$ seien nun S_+ bzw. S_- die Linien, für die alle Feldlinien für $y \rightarrow \infty$ bzw. $y \rightarrow -\infty$ in die Ebene $x=0$ abgebildet werden. Da für das betrachtete Magnetfeld gilt

$$B_z, B_z \xrightarrow{x \rightarrow -x} B_z, -B_z$$

sowie

$$B_x, B_z \xrightarrow{y \rightarrow -y} B_x, B_z$$

und

$$B_x, B_z \xrightarrow{z \rightarrow -z} -B_x, B_z$$

sind S_+ und S_- jeweils punktsymmetrisch zum Ursprung der Ebenen $y = \pm y_0$ sein. Desweiteren erhält man S_+ aus S_- durch Spiegelung an der $x = 0$ Ebene.

Seien weiterhin T_+ und T_- die Urbilder bzw. Bilder in der $y = 0$ Ebene von S_+ und S_- unter der durch (9.3) definierten Abbildung. Da das Magnetfeld (9.3) differenzierbar und y_0 endlich ist, sind, wie in Kapitel 2 für Euler-Potentiale untersucht, die Feldlinien differenzierbare Funktionen der Anfangsbedingungen. Damit sind T_+ und T_- einfach zusammenhängend. Weiterhin müssen wieder aus Symmetriegründen T_+ und T_- punktsymmetrisch zum Ursprung der $y = 0$ Ebene sein. Die Symmetrie der Flußspirale in y -Richtung zusammen mit der Symmetrie von S_+ und S_- zueinander erfordert, daß T_+ und T_- in der $y = 0$ Ebene symmetrisch in Bezug auf die $x = 0$ Linie sind. Für große $|z|$ müssen sich beide Linien der $x = 0$ Linie annähern, da für große $|z|$ B_x rasch gegen Null geht. Damit können T_+ und T_- im Prinzip nur die in Bild (9.4) skizzierte Form haben.

Bild (9.5) zeigt T_+ und T_- skizziert in dem Ergebnis der Feldlinienrechnungen für $B_y = 40$. Man erkennt, daß die Falten von T_+ und T_- Gebiete verschiedener Topologie und Durchstoßzahl trennen. Da für jeden Übergang von einem Gebiet geringerer in ein Gebiet höherer Durchstoßzahl ein Durchgang entweder durch T_+ oder T_- erforderlich ist, ist es klar, daß T_+ und T_- um so mehr Falten haben, je höher die maximale Umlaufzahl ist. Für $B_y \rightarrow 0$ muß also die Faltenzahl divergieren und damit zu einer im Grenzfall unendlich feinen Aufteilung des Gebietes in Parzellen eines Feldlinientyps führen. Diese entspricht qualitativ dem Verhalten der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten in der Nähe eines hyperbolischen Fixpunktes eines periodischen dynamischen Systems mit Störung [z.B. *Lichtenberg und Leiberman*, 1983], die sich in den homoklinischen Punkten schneiden.

Die wesentliche physikalische Anwendung dieses Effekts ist die eingangs erwähnte Möglichkeit für das

Dennoch gibt es gute Gründe, das einfache Modell nicht zu verwerfen. Zum einen ist nämlich ein Plasmoid im fernen Schweif abgesehen von Details im wesentlichen eine ähnliche Flußspirale wie diese FTE Modell und möglicherweise in einem stabilen solitären stationären Zustand. In der Tat gibt es von der Beobachtungsseite starke Gemeinsamkeiten zwischen beiden Ereignissen [R. Zwickl, Los Alamos, private Mitteilung]. Außerdem läßt sich spekulieren, ob eine ähnliche Flußspirale möglicherweise durch Wechselwirkung einer Kelvin-Helmholtz- mit einer Tearinginstabilität, die beide an der Magnetopause auftreten können, entstehen kann.

Der wesentliche Zweck und der entscheidende Vorteil dieses einfachen Modells ist es jedoch, dazu beizutragen, die Frage der Rekonnexion in solchen Strukturen zu klären. In zwangloser Weise ist es möglich, die Magnetosphäre zu öffnen und neu mit dem Magnetosheath zu verbinden, ohne Neutrallinien bzw. die in Kapitel 6 diskutierten Neutralpunkte der globalen Konfiguration einzubeziehen. Dieses geschieht mit Hilfe paralleler elektrischer Felder, welche außerdem Plasmabeschleunigung ermöglichen.

Die Zusammensetzung des FTE Modells aus topologisch verschiedenen Feldlinien ermöglicht auch die Bildung einer einzelnen Flußröhre, so daß eine globale Korrelation zwischen FTE-Ereignissen nicht gefordert werden muß. Alle diese Eigenschaften eröffnen neue Möglichkeiten, Rekonnexion an der Magnetopause zu betrachten.

10. Allgemeine Magnetische Rekonnexion

In den vorausgegangenen Kapiteln wurden die verschiedenen Aspekte magnetischer Rekonnexion theoretisch untersucht und in Kapiteln 8 und 9 angewendet. Die klassische Theorie des Merging oder $B=0$ -Rekonnexion war das Thema von Kapitel 6, während der neue Ansatz für Rekonnexion in nicht-verschwindenden Magnetfeldern in Kapitel 7 behandelt wurde.

In diesem Kapitel soll nun ein einheitliches Dach für $B \neq 0$ -Rekonnexion und $B=0$ -Rekonnexion vorgestellt werden [vgl. *Schindler et al.*, 1988; *Hesse und Schindler*, 1988]. Dazu gehen wir zurück auf die grundlegende Eigenschaft magnetischer Rekonnexion, nämlich die Verletzung des magnetischen Linien-erhalts. Zusammenbruch des Linien-erhalts, demonstriert am Beispiel resistiver Magnetohydrodynamik, kann auf zwei verschiedene Weisen vonstatten gehen (Bild 10.1): Durch globale magnetische Diffusion oder durch lokalisierte magnetische Diffusion, die auch allgemeine magnetische Rekonnexion genannt werden soll. Der aufgeführte Parameter R_m ist die magnetische Reynoldszahl, definiert als

$$R_m = \frac{\mu_0 v L}{\eta} \quad (10.1)$$

Dabei bezeichnen L , η und v typische Werte der Skalenlänge des Systems, der Resistivität und der Strömungs- oder Alfvéngeschwindigkeit, abhängig von der Situation.

Für globale Diffusion ist die magnetische Reynoldszahl von der Größenordnung eins, während ihre Werte für lokalisierte Diffusion wesentlich größer als eins sein müssen. In letzterem Fall wird die Plasmadynamik durch allgemeine magnetische Rekonnexion bestimmt.

Natürlich wäre eine Reynoldszahl, die statt mit der Systemskalenlänge L mit der typischen Länge der nichtidealen Zone D_R bestimmt wird, wieder von der Ordnung eins, aber global definierte Reynoldszahlen implizieren die obige Unterteilung.

Motiviert durch Bild (10.1) wird allgemeine magnetische Rekonnexion in Abwandlung von *Axfords* Definition (vgl. Kapitel 1) neu definiert als "Zusammenbruch der magnetischen Verbindung durch eine lokalisierte Nichtidealität".

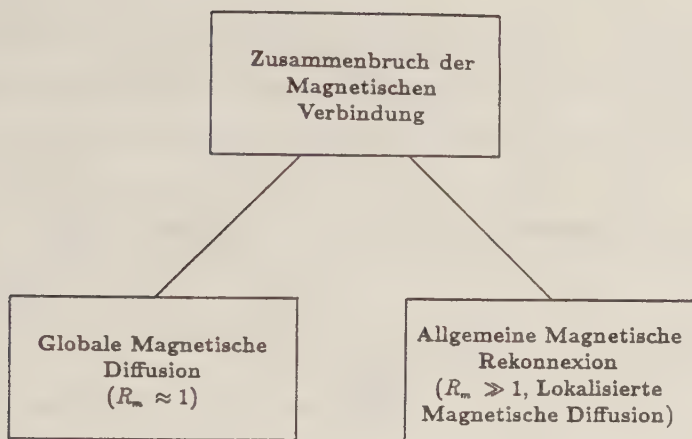


Bild 10.1 Illustration der zwei Arten des Zusammenbruchs der magnetischen Verbindung

Die verschiedenen Aspekte allgemeiner magnetischer Rekonnexion sind dargestellt in Bild (10.2). Durch die Ergebnisse dieser Arbeit ist eine Unterteilung allgemeiner magnetischer Rekonnexion nach topologischen Gesichtspunkten nahegelegt, d.h. danach, ob es möglich ist, lokal Separatrizen und Separatoren zu definieren.

Kapitel 5 zeigt, daß sich solche topologischen Objekte nur dann definieren lassen, wenn das Magnetfeld geeignete Neutralpunkte aufweist. Damit liegt die erste Unterteilung fest: Der linke Ast in Bild (10.2) bezeichnet Rekonnexion in Magnetfeldern, die Neutralpunkte innerhalb der nichtidealen Zone D_R aufweisen (B=0-Rekonnexion). Dabei ist es wichtig, daß die Neutralpunkte auch tatsächlich in dem nichtidealen Gebiet liegen, denn sonst spielen sie für Rekonnexion keine Rolle.

Unter die Unterteilung B=0-Rekonnexion fallen alle Untersuchungen der klassischen Neutralpunkt-rekonnexion, in denen das Plasma die lokale Feldtopologie wechselt. Diese Art Rekonnexion hat sich in der Vergangenheit als sehr wichtig gezeigt und ist daher ein wichtiger Bestandteil von allgemeiner magnetischer Rekonnexion.

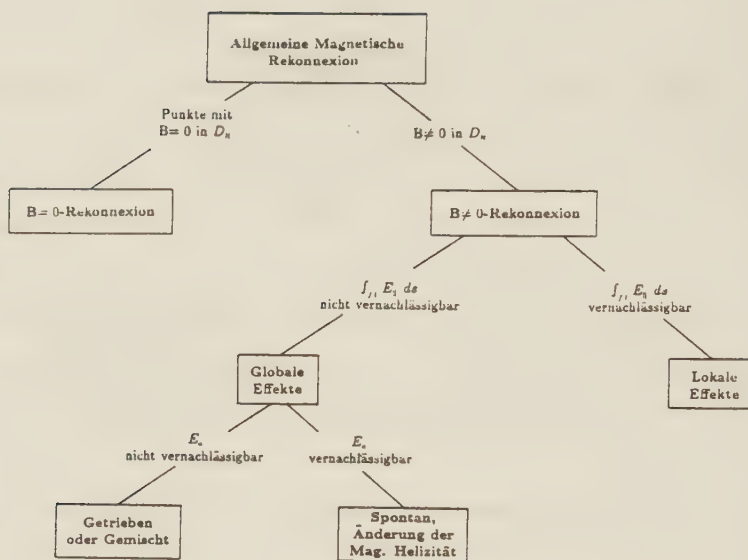


Bild 10.2 Allgemeine magnetische Rekonnexion

Der andere Ast ($B \neq 0$ -Rekonnexion) ist das grundlegend Neue an dem Begriff der allgemeinen magnetischen Rekonnexion. Hier werden die Fälle erfaßt, wo das Magnetfeld in D_R keine Neutralpunkte aufweist. Wie in Kapitel 7 gezeigt, läßt sich $B \neq 0$ -Rekonnexion weiter unterteilen, abhängig von den Eigenschaften von $\int E_1 ds$. Falls dieses Integral vernachlässigbar ist, hat die Rekonnexion nur lokale Effekte, ansonsten ist sie global.

$B \neq 0$ -Rekonnexion mit globalen Effekten und spontanen Prozessen, die mit einem vernachlässigbaren elektrischem Feld an dem Rand des Systems einhergehen, ändert die magnetische Helizität innerhalb des Systems (Kapitel 7). Alle anderen Dynamiken des Plasmasystems sind entweder getrieben oder von einem Mischtyp.

Die hier für allgemeine magnetische Rekonnexion gefundenen Einteilungen sind sicherlich nicht die einzig möglichen; Sie sind jedoch nahegelegt durch die Methodik und die Ergebnisse unserer Untersu-

chung.

Eine für physikalische Konzepte wesentliche Forderung ist die Möglichkeit der Verallgemeinerung für relativistische Situationen. Gerade bei magnetischer Rekonnexion, welche auf astrophysikalische Plasmen angewendet wird, ist die Möglichkeit der Verallgemeinerung eine wesentliche Forderung. Dieser Schritt soll hier vollzogen werden.

Um die relativistische Verallgemeinerung zu finden, betrachten wir den Feldtensor in Minkowski-Notation [Jackson, 1962]

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -iE_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -iE_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -iE_3 \\ iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

Das Ohm'sche Gesetz läßt sich kovariant schreiben durch

$$R_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} u_\nu \quad (10.3)$$

Hierbei ist Summation über den Index ν impliziert und u_ν ist die Vierergeschwindigkeit

$$u_\nu = (\gamma \mathbf{v}, i\gamma) \quad (10.4)$$

Die vierte Komponente von R_μ ist bestimmt durch (10.3)

$$R_4 = \frac{i}{c} \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \quad (10.5)$$

Die Bedingung für Fluß- und Linienenerhaltung bei lokalisierter Nichtidealität basiert auf der Rotation der räumlichen Komponenten von $\mathbf{R}_\mu$ und ist daher im allgemeinen nicht Lorentz invariant. Die einzige offensichtlich invariante Eigenschaft ist $\mathbf{R} = 0$.

Also kann die relativistische Verallgemeinerung von allgemeiner magnetischer Rekonnexion nur auf die Unterscheidung zwischen ideal und nichtideal Bezug nehmen. Rekonnexion im Sinne der relativistischen Verallgemeinerung findet statt, wenn $\mathbf{R} \neq 0$ in einem geeigneten Gebiet D_R im Ortsraum.

Zum Schluß des Kapitels soll noch die praktische Bedeutung der Verwendung lokaler Kriterien, d.h. Kriterien, die sich an lokalen Eigenschaften des Systems orientieren, erläutert werden. Die Verwendung

lokaler Kriterien folgt praktischen Gesichtspunkten, aber auch den Resultaten der Überlegungen der vorhergehenden Kapitel.

Im allgemeinen ist es technisch nicht möglich, etwa mit Satelliten festzustellen, ob ein Wechsel der globalen Topologie stattgefunden hat oder nicht. Statt dessen liefert ein Satellit nur Daten von eindimensionalen Schnitten aus dem vierdimensionalen Raum-Zeit Kontinuum, die es nicht erlauben, globale Topologie zu erkennen. Parallele elektrische Felder in einem begrenzten Raumbereich sind jedoch relativ leicht zu messen. Weil $B \neq 0$ -Rekonnexion nicht unbedingt eine Änderung der globalen Topologie des Magnetfeldes erzeugt (Kapitel 8), ist die Verwendung lokaler Kriterien unumgänglich.

11. Zusammenfassung und Diskussion

In der vorliegenden Arbeit wurde ein neues Konzept für magnetische Rekonnexion entwickelt, welches sowohl die konventionelle X-Linien Rekonnexion ($B=0$ -Rekonnexion) als auch Rekonnexion in allgemeinen dreidimensionalen und singularitätenfreien Magnetfeldern einschließt. In den vorausgegangenen Kapiteln sind die Werkzeuge zur Herleitung und die verschiedenen Teilaspekte der allgemeinen magnetischen Rekonnexion diskutiert worden. Dieses letzte Kapitel soll den Zweck erfüllen, eine Übersicht über den Inhalt der Arbeit zu geben, die physikalische Relevanz und Konsequenz der Ergebnisse kritisch zu diskutieren und einen Ausblick auf in der Zukunft anstehende Folgearbeiten, die zu einem noch tieferen Verständnis führen können, zu geben.

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Frage, ob sich das auf Erfahrungen mit zweidimensionalen Systemen und entsprechenden Extrapolationen stützende Rekonnexionskonzept von Merging in allgemeinen dreidimensionalen Plasma-Magnetfeldstrukturen als brauchbare Beschreibung erweist. Die weitgehend vorherrschende Meinung, dies sei der Fall, wurde durch drei verschiedene Beispiele widerlegt.

Das erste Beispiel steht im engen Zusammenhang mit der lokalen Topologie nichtsingulärer Magnetfelder. Untersucht wurde, ob es möglich ist, in dem lokalen Magnetfeld einer X-Linie mit Magnetfeldkomponente parallel zur X-Linie idealen Plasmatransport über die Separatrixflächen des Magnetfeldes ohne Parallelkomponente zu erreichen. In diesem für die Diskussion des stationären Merging typischen Beispiel gelang es, eine vollständig ideale Plasmaströmung über die Feldfläche hinweg zu konstruieren, die nach gängigen Vorstellungen als Kandidat für eine Separatrixfläche in Frage kommen sollte. Das zunächst überraschende Resultat, das dazu keinerlei Nichtidealität im Ohm'schen Gesetz erforderlich ist, konnte durch Heranziehung von Überlegungen zur mathematischen topologischen Äquivalenz verständlich gemacht werden.

Damit ist offenbar die Definition von *Vasyliunas* [1975] (Abschnitt 6.2) singulär, d.h., nur gültig, wenn die Parallelkomponente des Magnetfeldes verschwindet. Jede noch so kleine Parallelkomponente ermöglicht ideale und damit auch linienerhaltende Plasmabewegung über die ehemalige Separatrixfläche.

Das zweite Beispiel betrifft die Bildung und Entwicklung von Plasmoiden im Schweif der Erdmagnetosphäre. Im zweidimensionalen Bild ist die Rekonnexion erklärt durch Tearing, also durch X-Punktbildung und Rekonnexion an den X-Punkten. Um eine dreidimensionale Verallgemeinerung der Plasmoidbildung und Evolution zu finden, wurde ein kinematisches Modell entworfen, welches wesentliche strukturelle Eigenschaften der zweidimensionalen Analysen in geeigneter Weise überträgt.

Eine Diskussion im Rahmen eines voll selbstkonsistenten dreidimensionalen Modells schied dabei von vornherein aufgrund der für alle erreichbaren Computer zu hohen Speicher- und Rechengeschwindigkeitsanforderungen aus. Zudem ist für die Zwecke der Diskussion im Zusammenhang mit einem neuen Konzept von allgemeiner magnetische Rekonnexion ein topologisch richtiges Modell durchaus ausreichend.

Speziell in der frühen Phase der Plasmoidentwicklung gehört in generischen dreidimensionalen Fällen das Plasmoidmagnetfeld topologisch zum Dipolfeld der Erde, also kann *à priori* darin keine Separatrix, die topologisch verschiedene Feldlinien voneinander trennt, existieren. Daher ist der Konzeption der alten Definition von Rekonnexion der Boden entzogen.

Trotzdem wird aber die Plasmoidformation als eines der bedeutensten Beispiele magnetischer Rekonnexion im Schweif der Magnetosphäre gesehen. Außerdem ist es selbst aus dem kinematischen Modell leicht einsehbar, daß das Entstehen einer Plasmoidstruktur automatisch eine Neuverbindung von Feldlinien und damit auch des Plasmas auf den betreffenden Feldlinien erzeugt. Damit erscheint auch hier Merging ungeeignet, um magnetische Rekonnexion zu beschreiben.

Im weiteren Verlauf der Plasmoidentwicklung fanden wir, daß die Zusammensetzung des Plasmoïds aus Feldlinien verschiedener Zugehörigkeit insbesondere in der Phase der Ablösung aus dem erdnahen Feld unerwartet komplex wurde. Das Plasmoid setzt sich zusammen aus Feldlinien jedes in dem Modell möglichen topologischen Typs. Während der Evolution verschob sich die Anzahl der jeweiligen Feldlinientypen langsam, so daß in dem Stadium, wo ein zweidimensionales Plasmoid vollständig abgelöst wäre, das dreidimensionale Plasmoid noch geschlossenen Fluß und Lobefeldlinien enthält. So besteht über eine relativ lange Zeit der Entwicklung eine Verbindung zwischen Lobe-Magnetfeld und Plasmoid. Dieses Resultat deutet eine Erklärung von Beobachtungen filamentierter Plasmastrukturen in den Lobes an.

Außerdem bietet die Mischung der Feldlinientopologie eine neue Interpretation im Sinne eines Mechanismus, der die Ordnung im System stört, also eines Dissipationsmechanismus. Aufgrund endlicher Larmorradien der Ionen können diese damit innerhalb des Plasmoids auf Feldlinien anderer Topologie überwechseln und damit eine etwa vorhandene adiabatische Invariante der Oszillation in Nord-Süd Richtung (bounce motion) auf geschlossenen Feldlinien [z.B. *Cap*, 1982] zerstören.

Im Zuge einer Analyse der Rolle des parallelen elektrischen Feldes bei der kinematischen Evolution zeigte sich dessen Bedeutung in allen Phasen der Plasmoidentwicklung. Insgesamt erwies sich das Plasmoidmodell als ein einfaches, aber charakteristisches Modell für $B \neq 0$ -Rekonnexion und die Rolle, die Flußspiralen bei Rekonnexion spielen können.

Als drittes Beispiel wurde das Phänomen der Flußspiralen an der Magnetopause, der sogenannten Flux-Transfer-Events, anhand eines weiteren lokalen kinematischen Modells untersucht. Es gelang auf diese Weise, mittels einer Neuverbindung, initiiert durch eine in eine Modellmagnetopause gelegte Flußröhre aus spiralen den Feldlinien, Querverbindungen zwischen beiden Seiten der Magnetopause zu schaffen und damit eine neue Feldlinientopologie zu generieren.

Das zur FTE-Beschreibung verwendete Modell ist, in Übereinstimmung mit Resultaten der Beobachter [z.B. *Paschmann et al.*, 1984] so angelegt, daß es keine X-Linien enthält. Außerdem kann das Störfeld an der Magnetopause als lokalisiert verstanden werden, so daß zunächst globale physikalische Parameter nicht durch die Existenz einer derartigen Flußspirale beeinflußt werden. Es zeigte sich, daß sich mit einer solchen *lokalisierten* Änderung des Magnetfeldes ohne die Einbeziehung nichtidealer Effekte an etwa im globalen Feld vorhandenen Neutralpunkten sogar eine Änderung der globalen Topologie erreichen ließ. Damit ist ein weiteres Beispiel für eine Unzulänglichkeit der Rekonnexionskonzepte geliefert, welche sich auf X-Linien oder Neutralpunkte allein stützen.

Obwohl das kinematische Modell natürlich die Entstehung einer FTE-Flußspirale nicht erklären kann, so zeigt es doch eine Reihe neuer Eigenschaften, die für Flußröhren an der Magnetopause typisch sein dürften. Eine dieser Eigenschaften ist, ähnlich wie beim Plasmoid, die topologische Substruktur der Flußspirale. Als ein wesentliches neues Ergebnis konnte eine Flußspirale mit ungeordneter Verbindung

zum umgebenden Feld isoliert existieren ohne die simultane Koexistenz einer zweiten, symmetrischen Struktur.

Die Mischung der verschiedenen Feldlinien ermöglichte wieder, einen Dissipationsmechanismus durch Wechsel der Feldtopologie zu diskutieren. Im Gegensatz zur Plasmoidstruktur verfeinerte sich bei der FTE-Flußspirale die topologische Substrukturierung mit der Abnahme der Magnetfeldkomponente entlang der Achse des FTEs immer mehr, so daß, in Analogie zum Chaos in topologisch toroidalen dynamischen Systemen, sich im Grenzfall eine mischende Struktur einstellt. Der Übergang dazu konnte mit Hilfe von Stetigkeitseigenschaften der durch das Magnetfeld definierten Abbildung beschrieben werden. Die wachsende Komplexität der Feldlinientopologie innerhalb der Flußspirale zeigte deutlich, daß sich Separatoren und Separatrizen hier beliebig schwer finden lassen. Daher erwies sich Merging hier zumindest als ein unpraktikables Rekonnexionsmodell.

Ein weiterer neuer Aspekt des FTE-Modells ist die Möglichkeit, vermittels Flußspiralen neue Verbindungen quer zur Magnetopause zu schaffen, ohne die in der globalen Struktur der in das interplanetare Magnetfeld eingebetteten Magnetosphäre vorhandenen Neutralpunkte zu beeinflussen. Der Zusammenhang zwischen $B \neq 0$ -Rekonnexion und magnetischer Helizität ließ sich ausnutzen, um ein für die Entstehung einer solchen Flußspirale erforderliches mittleres paralleles elektrisches Feld zu berechnen, welches durchaus realistische Werte erzielte. Insgesamt erwies sich allgemeine magnetische Rekonnexion als das geeignete Konzept, welches auch fleckenhafte magnetische Rekonnexion an der Magnetopause korrekt erfaßt.

Die Verwendung eines kinematischen Modells ist beiden genannten Beispielen gerechtfertigt, da gegenwärtig nach unserem Wissen keine hinreichend genauen Simulationen, die hier zu verwenden gewesen wären, existieren. Außerdem wurden in beiden Fällen so weit wie möglich versucht, Eigenschaften bekannter, so zum Beispiel zweidimensionaler, Modelle qualitativ einzuschließen. So darf mit Recht erwartet werden, daß die aus den kinematischen Modellen gewonnenen Erkenntnisse über so grundlegende Eigenschaften wie die Feldlinientopologie typisch auch für Resultate aus dynamischen Modellen sein dürften.

Um einen Ansatz für eine hinreichend allgemeine Form von Rekonnexion zu finden und plausibel

zu machen, mußte zunächst in einer abstrakten mathematischen Form eine Definition von allgemeiner magnetischer Rekonnexion gegeben werden. Diese Definition machte Gebrauch von den topologischen Eigenschaften des Magnetfelds und deren Änderungen so wie der durch die Plasmabewegung gegebenen Abbildung. Einer durch die Anschauung motivierten Bedingung an magnetische Rekonnexion wurde durch die abstrakte Forderung, daß in einem Rekonnexionsprozeß die durch die Plasmabewegung definierte Abbildung bis auf einen endlichen Bereich mit der Feldänderung im Sinne einer topologieerhaltenden Abbildung kompatibel sein muß, Rechnung getragen. Die abstrakte Definition von allgemeiner magnetischer Rekonnexion wurde in den mehr physikalisch orientierten weiteren Untersuchungen stets wiedergefunden.

Für eine physikalisch orientierte Beschreibung allgemeiner magnetischer Rekonnexion mußte ein geeigneter Formalismus entwickelt werden. Zur adäquaten Beschreibung der Magnetfelder und elektrischen Felder konnten Euler-Potentiale verwendet werden (Kapitel 2). Unter Einbeziehung eines Ohm'schen Gesetzes mit allgemeiner Nichtidealität ließ sich ein einfacher Satz dynamischer Gleichungen für die zeitliche Variation der Euler-Potentiale finden.

Die Zeitableitung der Euler-Potentiale war dabei sowohl durch die Zeitableitung des Magnetfeldes als auch durch die Plasmabewegung relativ zum Magnetfeld gegeben. Diese kinematische Betrachtung, die der zeitlichen Änderung der numerischen Werte der Euler-Potentiale, wie sie von einem mittransportierten Plasmaelement gesehen würde, erwies sich als besonders geeignet zur Anwendung auf wesentliche grundsätzliche Aspekte magnetischer Rekonnexion, die auch in jeder dynamischen Untersuchung zu finden sein müssen.

Der Vollständigkeit halber wurde für die in den in den Anwendungen interessantesten Konfigurationen ein Existenzbeweis für Euler-Potentiale geliefert. In den für das neue Konzept von Rekonnexion besonders wichtigen Situationen mit nichtsingulärem Magnetfeld konnte sogar die Existenz von Euler-Potentialen im gesamten Grundgebiet bewiesen werden. Nicht einfach zusammenhängende Gebiete, zum Beispiel Tori, sind in der Untersuchung enthalten, wenn die Physik des Systems erlaubt, sie aufzuschnitten und als Zylinder zu behandeln. Dieses bedeutet im speziellen, daß die Plasmabewegung in toroidaler

Richtung hinreichend langsam zu erfolgen hat.

Zur Vorbereitung der weiteren Untersuchungen wurden magnetische Linien- und magnetischer Flußerhaltung in der neuen Formulierung diskutiert. Es zeigte sich, daß die Euler-Potentialformulierung des Magnetfeldes einen wesentlich vereinfachten Beweis der Theoreme über Linien- bzw. Flußerhaltung ermöglichen. Damit wurden Bedingungen an die Nichtidealität im Ohm'schen Gesetz hergeleitet, die entweder Linien- oder Flußerhaltung erzielen. Für den für magnetische Rekonnexion bedeutenden Fall einer lokalisierten Nichtidealität konnte bewiesen werden, daß magnetische Flußerhaltung gleichbedeutend ist mit magnetischer Linien- und Flußerhaltung. An dieser Stelle wurde bereits offensichtlich, daß die Sonnerup'sche Definition magnetischer Rekonnexion [Sonnerup, 1984] unzureichend ist.

Im Licht der Euler-Potentialformulierung konnte dann X-Linien Rekonnexion gesehen werden. Der Formalismus ließ sich anwenden, um Aussagen über Rekonnexion an Neutrallinien, die bisher nur relativ aufwendig beweisbar waren, auf einfache Weise neu zu erhalten. Zudem konnte der Übergang von einer echten Neutrallinie zu einer Konfiguration mit nichtverschwindendem Magnetfeld vollzogen werden. Die dabei auftretenden formalen Singularitäten in der Euler-Potentialdarstellung ließen sich mit der Änderung der lokalen topologischen Struktur des Magnetfeldes (Abschnitt 6.3) erklären. Da diese Resultate zeigten, daß eine Notwendigkeit für einen neuen, verallgemeinerten Ansatz für magnetische Rekonnexion besteht und sich lediglich zeigen ließ, daß Merging ein brauchbares Prinzip bei Neutrapunktrekonnexion ist, wurde die Neutrallinienrekonnexion mit $B=0$ -Rekonnexion bezeichnet.

Der Vollständigkeit halber wurden das Verhalten der Euler-Potentiale und der Bogenlängenkoordinate an Singularitäten des Magnetfeldes analysiert. Es zeigte sich, daß solche Singularitäten qualitativ den bekannten Singularitäten etwa der sphärischen Polarkoordinaten am Ursprung entsprechen und deshalb mathematisch gut handhabbar sind.

Am Ende des Kapitels, welches sich mit Merging beschäftigt, schließt sich eine Darstellung der globalen Topologie einer simplen Modellmagnetosphäre an (Abschnitt 6.4). In der globalen Darstellung ist die Existenz von zwei neutralen Punkten mit einer die Singularitäten verbindenden Feldlinie die Folge eines interplanetaren Magnetfeldes geeigneter Richtung. Somit konnte in diesem Bild, als Gegensatz zu

der später untersuchten lokalisierten Rekonnexion, qualitativ globale Rekonnexion an der Magnetopause erläutert werden.

Im weiteren wurde nun ein Konzept für Rekonnexion in Magnetfeldern, welche keine relevanten, d.h. in der nichtidealen Zone gelegenen, Neutralpunkte besitzt, entwickelt. Hierbei konnte die Euler-Potentialdarstellung besonders vorteilhaft verwendet werden. Zusammen mit der geleisteten Vorarbeit zu den Bedingungen für Linien- und Flußerhaltung war es möglich, durch gezielte Verletzung derselben eine allgemeine Bedingung für Rekonnexion in nichtsingulären Magnetfeldern, die sogenannte $B \neq 0$ -Rekonnexion, herzuleiten.

Es stellte sich dabei heraus, daß $B \neq 0$ -Rekonnexion auf zwei Weisen erfolgen kann, nämlich global oder lokal. Der Diskriminator zwischen beiden Aspekten erwies sich als das zum Magnetfeld parallele elektrische Feld. Falls das parallele elektrische Feld auf einer ganzen Flußröhre ein nichtverschwindendes Integral entlang individueller Feldlinien besitzt, also die Anteile eines Vorzeichens überwiegen, hat die Rekonnexion globale Effekte. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so wird die magnetische Verbindung nur zwischen Plasmaelementen, welche durch das nichtideale Gebiet gelaufen sind und Plasmaelementen, die im idealen Gebiet mit ersteren auf ursprünglich einer gemeinsamen Feldlinie lagen, unterbrochen.

Im Falle globaler Effekte der $B \neq 0$ -Rekonnexion fand sich eine weitere Substruktur des Konzeptes. Abhängig von dem elektrischen Feld an der Grenze des untersuchten Volumens läßt sich ein Prozeß etwa einer Strukturbildung als spontan oder getrieben/gemischt einstufen. Wenn das elektrische Feld in einer Umgebung des Gebietsrandes verschwindet, ist ein im Innern einsetzender Prozeß als spontan einzustufen.

Für solche Prozesse wurde gezeigt, daß man eine eichinvariante verallgemeinerte magnetische Helizität finden kann, die sich genau dann ändert, wenn globale $B \neq 0$ -Rekonnexion stattfindet. Die verallgemeinerte magnetische Helizität benutzt nur die Kenntnis der magnetischen Feldkonfiguration zu zwei verschiedenen Zeiten, um daraus Aussagen über $B \neq 0$ -Rekonnexion und damit über parallele elektrische Felder ableiten zu können. Die bekannte magnetische Helizität [z.B. *Taylor*, 1986] läßt sich als Sonderfall aus der verallgemeinerten Form gewinnen.

Somit ist es gelungen, eine Verbindung zwischen magnetischer Rekonnexion und magnetischer Heli-

zität herzustellen. Da die magnetische Helizität auf globale Eigenschaften des Magnetfeldes basiert, besteht damit auch ein Zusammenhang zwischen der globalen Topologie des Magnetfeldes und der durch lokale Kriterien definierten Rekonnexion.

Zusammenfassend wurde das allgemeine Konzept von Rekonnexion anschließend aus der physikalisch orientierten Blickrichtung dargestellt und seine Unterteilungen erläutert. Die dabei verwendeten lokalen Kriterien begründeten sich in der praktischen Anwendbarkeit. Speziell im Hinblick auf astrophysikalische Plasmen z.B. in der Magnetosphäre eines Pulsars wurde eine relativistische Verallgemeinerung von allgemeiner magnetischer Rekonnexion angeführt.

Der in dieser Grundlagenuntersuchung nicht enthaltene Aspekt ist das dynamische, selbstkonsistente Verhalten vom Plasmasystemen, in denen magnetische Rekonnexion stattfindet. Die wohl entscheidende, in Zukunft zu klärende Frage ist die der Herkunft des parallelen elektrischen Feldes. Es ist klar, daß es im Laufe weniger Jahre möglich sein wird, parallele elektrische Felder in dreidimensionalen MHD Simulationen durch feldlinienparallele Ströme zu erhalten; jedoch klärt dies auch noch nicht den weitgehend unbekannten mikroskopischen Ursprung.

Es sind zwar Plasmawellen und Instabilitäten bekannt, die ein paralleles elektrisches Feld in astrophysikalische Plasmen erzeugen, so zum Beispiel kinetische Alfvénwellen [Hasegawa, 1975], Ionen-akustische Wellenturbulenz, die anomale Resistivität erzeugt [Hasegawa, 1975] oder anomale Resistivität erzeugt durch Lower-Hybrid Drift Turbulenz [Drake, 1984], aber es fehlt an einer selbstkonsistenten und notwendigerweise dreidimensionalen Untersuchung in geeigneten Strukturen.

Auf die grundlegende Frage, auf welche Weise Rekonnexion *prinzipiell* in allgemeinen dreidimensionalen Plasmasystemen ablaufen kann, gibt diese Arbeit eine Antwort. Es konnte gezeigt werden, daß der entscheidende physikalische Kontrollparameter durch das zum Magnetfeld parallele elektrische Feld gegeben ist. Die Bedeutung des neuen Konzepts ließ sich im Rahmen zweier astrophysikalischer Situationen anhand einfacher Modelle demonstrieren. Es wurde ein neuer Zusammenhang zwischen magnetischer Rekonnexion und magnetischer Helizität gefunden.

Nach unserem Wissen ermöglicht die hier vorgestellte Theorie erstmals, magnetische Rekonnexion

in weitgehend beliebigen Magnetfeld-Plasma Konfigurationen unabhängig von bestimmten Topologien zu erfassen und zusammenhängend zu beschreiben.

Literatur

- V. I. Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer, Berlin (1980)
- V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, Berlin (1983)
- W. I. Axford, Magnetic Reconnection, in *Magnetic Reconnection in Space and Astrophysical Plasmas*, *Geophys. Monogr. Ser.*, vol. 30, edited by E. W. Hones, Jr., p. 1, AGU, Washington D.C. (1984)
- P. J. Baum and A. Bratenahl, Magnetic reconnection experiments, *Adv. Electron. and Electron Phys.*, 54, 1 (1980)
- G. Birkhoff and G.-G. Rota, *Ordinary differential equations*, Blaisdell, Waltham (Mass.) (1969)
- J. Birn and K. Schindler, On the influence of an external electric field on magnetotail reconnection, *J. Geophys. Res.*, 91, 8817 (1986)
- J. Birn, and E. W. Hones, Jr., Three-dimensional computer modelling of dynamic reconnection in the geomagnetic tail, *J. Geophys. Res.* 86, 6802 (1984)
- J. Birn, Computer studies of the dynamic evolution of the geomagnetic tail, *J. Geophys. Res.* 85, 1214 (1980)
- T. Bröcker, *Differential Germs and Catastrophes*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1975)
- I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Harri Deutsch (1977)
- F. F. Cap, *Handbook on plasma instabilities*, Academic Press, New York (1982)
- R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Interscience, New York (1962)
- S. W. H. Cowley, Comments on the merging of nonantiparallel magnetic fields, *J. Geophys. Res.*, 81, 3455 (1976)
- T. G. Cowling, The magnetic fields of sunspots, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, 94, 39 (1934)
- N. U. Crooker, Dayside merging and cusp geometry, *J. Geophys. Res.*, 84, 951 (1979)
- P. W. Daly, M. A. Saunders, R. P. Rijnbeek, N. Sckopke, and C. T. Russell, The distribution of reconnection geometry in flux transfer events using energetic ion, plasma and magnetic data, *J. Geophys.*

- Res.*, 89, 3843 (1984)
- J. W. Dungey, Conditions for the occurrence of electrical discharges in astrophysical systems, *Phil. Mag.*
Ser., 7, 44, 725 (1953)
- J. W. Dungey, Cosmic Electrodynamics, Cambridge University Press, New York (1958)
- J. W. Dungey, Interplanetary magnetic field and the auroral zones, *Phys. Rev. Lett.*, 6, 47 (1961)
- K. Elsässer, Magnetic field line flow as a Hamiltonian Problem, *Plasma Phys. Contr. Fus.*, 28, 1743
 (1987)
- K. Elsässer, D. Düchs und C. Sack, Stochastic stability of a plasma torus, *Phys. Lett. A*, 120, 57 (1987)
- L. Euler, Sectio Secunda de Principiis Motus Fluidorum, Novi Comentariorum Acad. Sci. Petropolitanae,
 14, 270 (1769), nachgedruckt in: Leonardi Euleri Opera Omnia (Swiss Society for Natural Sciences,
 1955), Ser. II, Vol.13, S.73
- D. H. Fairfield, On the average configuration of the geomagnetic tail, *J. Geophys. Res.*, 84, 1950 (1979)
- Z. F. Fu, and L. C. Lee, Simulation of multiple x-line reconnection at the dayside magnetopause, *Geophys.*
Res. Lett., 12, 291 (1985)
- S. Fukao, M. Ugai and T. Tsuda, Topological studies of the magnetic field near a neutral point; *Rep.*
Ion. Space Res. Japan, 29, 133 (1975)
- H. P. Furth, J. Killeen and M. N. Rosenbluth, Finite-Resistivity Instabilities of a Sheet Pinch, *Phys.*
Fluids, 6, 459 (1963)
- A. A. Galeev and L. M. Zelenyi, Tearing instability in plasma configurations, *Sov. Phys. JETP*, Engl.
 Transl., 43, 1113 (1976)
- A. A. Galeev, M. M. Kuznetsova and L. M. Zelenyi, Magnetopause Stability Threshold for Patchy Re-
 connection, preprint, *Space Sci. Rev.* (1985)
- R. G. Giovanelli, A theory of chromospheric flares, *Nature*, 158, 81 (1946)
- H. Goldstein, Klassische Mechanik, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden (1978)
- I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York
 (1980)

- J. M. Greene, Geometrical properties of three-dimensional reconnecting magnetic fields with nulls, preprint, *J. Geophys. Res.* (1987)
- G. Haerendel, G. Paschmann, N. Scopke, H. Rosenbauer and P. C. Hedgecock, The frontside boundary layer of the magnetosphere and the problem of reconnection, *J. Geophys. Res.*, **83**, 3159 (1978)
- G. Haerendel, On the potential role of field-aligned currents in solar physics, Proc. 21st ESLAB Symposium, Bolkesjø, Norway *ESA* (1987)
- E. G. Harris, On a plasma sheet separating regions of oppositely directed magnetic fields, *Nuovo Cim.*, **29**, 115 (1962)
- A. Hasegawa, Plasma instabilities and nonlinear effects, Springer, Berlin (1975)
- R. Hautz and M. Scholer, Numerical simulations on the structure of plasmoids in the deep tail, *J. Geophys. Res.*, **14**, 969 (1987)
- I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, John Wiley, New York (1975)
- M. Hesse and K. Schindler, Bifurcation of current sheets in plasmas, *Phys. Fluids*, **29**, 2484 (1986)
- M. Hesse and M. Kiessling, On the onset of eruptive processes in plasmas I, *Phys. Fluids*, **30**, 2720 (1987)
- M. Hesse and K. Schindler, A theoretical foundation of general magnetic reconnection, *J. Geophys. Res.*, im Druck (1988)
- E. W. Hones, Jr., Substorm processes in the magnetotail: Comments on 'On hot tenuous plasma fireballs and boundary layers in the earth's magnetotail' by L. A. Frank, K. L. Ackerson and R. P. Lepping, *J. Geophys. Res.*, **82**, 5633 (1977)
- E. W. Hones, Jr., *Magnetic Reconnection in Space and Astrophysical Plasmas*, *Geophys. Monogr. Ser.*, vol. **30**, AGU, Washington D.C. (1984)
- C. Y. Huang, L. A. Frank, W. K. Peterson, D. J. Williams, W. Lennartson, D. G. Mitchell, R. C. Elphic and C. T. Russell, Filamentary structures in the magnetotail lobes, *J. Geophys. Res.*, **92**, 2349 (1987)
- W. J. Hughes, and D. G. Sibeck, On The 3-dimensional Structure of Plasmoids, *J. Geophys. Res.*, **14**, 636 (1987)
- J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley, New York (1962)

- J. L. Johnson, R. Oberman, R. M. Kulsrud and E. A. Friedman, *Phys. Fluids*, **1**, 281 (1958)
- E. Kamke, *Differentialgleichungen 1*, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig (1962)
- M. Kiessling, and K. Schindler, Analytical stability analysis for a two-dimensional magnetotail model by use of statistical mechanics, *J. Geophys. Res.*, **92**, 5795 (1987)
- N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics*, McGraw Hill, New York (1973)
- L. C. Lee and Z. F. Fu, A theory of magnetic flux transfer at the earth's magnetopause, *Geophys. Res. Lett.*, **12**, 2 (1985)
- L. C. Lee and Z. F. Fu, Multiple x line reconnection 1, a criterion for the transition from a single x line to a multiple x line reconnection, *J. Geophys. Res.*, **91**, 6807 (1986)
- A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and stochastic motion*, Springer, Berlin (1983)
- M. K. Moffat, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*, Cambridge University Press, London (1978)
- D. Kh. Morozov, and O. P. Pogutse, Plasma diffusion in systems with disrupted magnetic surfaces, *Sov. J. Plasma Phys.*, **8**, 3 (1982)
- A. Nishida, Reconnection in the earth's magnetotail: an overview, in *Magnetic Reconnection in Space and Astrophysical Plasmas*, *Geophys. Monogr. Ser.*, vol. **30**, edited by E. W. Hones, Jr., p. 159, AGU, Washington D.C. (1984)
- W. A. Newcomb, Motion of magnetic lines of force, *Annals Phys.*, **3**, 374 (1958)
- T. G. Northrop, *The adiabatic motion of charged particles*, Interscience, New York (1963)
- A. Otto, Zur linearen und nichtlinearen Analyse resistiver Instabilitätsprozesse in schwach zweidimensionalen Gleichgewichten, Dissertation, Ruhr-Universität (1987)
- E. N. Parker, Sweet's mechanism for merging magnetic fields in conducting fluids, *J. Geophys. Res.*, **62**, 509 (1957)
- E. N. Parker, The solar-flare phenomenon and the theory of reconnection and annihilation of magnetic fields, *Astrophys. J., Suppl. Ser.*, **8**, 177 (1963)
- E. N. Parker, *Cosmical Magnetic Fields*, Oxford University Press, Oxford (1979)

- G. Paschmann, B. U. Ö. Sonnerup, I. Papamastorakis, N. Scokpe, G. Haerendel, S. J. Bame, J. R. Asbridge, J. T. Gosling, C. T. Russell and R. C. Elphic, Plasma acceleration at the earth's magnetopause: evidence for reconnection, *Nature*, **282**, 243 (1979)
- G. Paschmann, G. Haerendel, I. Papamastorakis, H. Scokpe, S. J. Bame, J. T. Gosling and C. T. Russell, Plasma and magnetic field characteristics of magnetic flux transfer events, *J. Geophys. Res.*, **87**, 2159 (1982)
- H. E. Petschek, Magnetic field annihilation, AAS-NASA Symposium on the physics of solar flares, *NASA Spec. Publ. SP-50*, 425 (1964)
- E. R. Priest, On steady magnetic-field reconnection, *Astrophys. J.*, **181**, 227 (1973)
- E. R. Priest and T. G. Forbes, New models for fast steady state reconnection, *J. Geophys. Res.*, **91**, 5579 (1986)
- M. Reed and B. Simon, Methods of modern mathematical physics 1: Functional analysis, Academic Press, New York (1978)
- M. N. Rosenbluth, R. Z. Sagdeev and J. B. Taylor, Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities, *Sov. J. Plasma Phys.*, **8**, 247 (1982)
- C. T. Russell and R. C. Elphic, Initial ISEE magnetometer results: Magnetopause observations, *Space Sci. Rev.*, **22**, 681 (1978)
- C. T. Russell and R. C. Elphic, ISEE observations of flux transfer events at the dayside magnetopause *Geophys. Res. Lett.*, **6**, 33 (1979)
- M. A. Saunders, C. T. Russell and N. Scokpe, Flux transfer events: scale size and interior structure, *Geophys. Res. Lett.*, **11**, 131 (1984)
- K. Schindler, A Theory of the Substorm Mechanism, *J. Geophys. Res.*, **79**, 2803 (1974)
- K. Schindler, On the role of irregularities in the plasma entry into the magnetosphere, *J. Geophys. Res.*, **84**, 7257 (1979)
- K. Schindler, Magnetic reconnection in astrophysics, in: *Trends in physics 1984*, proceedings of the 6th general conference of the European Physical Society, I. Janta und I. Pantoficek (Hrsg.), Union of

Czechoslovak Mathematicians and Physicists, Prag (1984)

- K. Schindler, Spontaneous reconnection, in *Magnetic Reconnection in Space and Astrophysical Plasmas*, *Geophys. Monogr. Ser.*, vol. 30, edited by E. W. Hones, Jr., p. 9, AGU, Washington D.C. (1984)
- K. Schindler und J. Birn, Magnetotail theory, *Space Sci. Rev.*, 91, 307 (1986)
- K. Schindler, M. Hesse and J. Birn, General magnetic reconnection, parallel electric fields and helicity, *J. Geophys. Res.*, im Druck (1988)
- B. U. Ö. Sonnerup, Magnetic field re-connexion in a highly conducting incompressible fluid, *J. Plasma Phys.*, 4, 161 (1970)
- B. U. Ö. Sonnerup, G. Paschmann, I. Papamastorakis, N. Sckopke, G. Haerendel, S. J. Bame, J. R. Asbridge, J. T. Gosling and C. T. Russell, Evidence for magnetic field reconnection of the earth's magnetopause, *J. Geophys. Res.* 86, 10049 (1981)
- B. U. Ö. Sonnerup, and 13 coauthors, in: *Solar Terrestrial Physics: Present and Future*, eds. D. M. Butler and K. Papadopoulos *NASA Ref. Publ. 1130*, Washington, D.C. (1984)
- B. U. Ö. Sonnerup, Magnetic field reconnection at the magnetopause: an overview, in: *Magnetic Reconnection in Space and Astrophysical Plasmas*, *Geophys. Monogr. Ser.*, vol. 30, edited by E. W. Hones, Jr., p. 92, AGU, Washington D.C. (1984)
- B. U. Ö. Sonnerup, On the stress balance in flux transfer events, *J. Geophys. Res.*, 92, 8613 (1987)
- D. P. Stern, Euler Potentials, *Am. J. Phys.*, 38, 495 (1970)
- H. R. Strauss, Turbulent reconnection, *Astrophys. J.*, 326, 412 (1988)
- P. A. Sweet, The neutral point theory of solar flares, in: *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, edited by B. Lehnert, *Cambridge Univ. Press, London* (1958)
- J. B. Taylor, Relaxation and magnetic reconnection in plasmas, *Rev. Mod. Phys.*, 58, 741 (1986)
- W. Thirring, *Lehrbuch der mathematischen Physik 1: Klassische dynamische Systeme*, Springer, New York (1977)
- M. Ugai, Magnetic field reconnexion in a sheared field, *J. Plasma Physics*, 25, 89 (1981)
- V. M. Vasyliunas, Nonuniqueness of Magnetic Field Line Motion, *J. Geophys. Res.*, 77, 6271 (1972)

- V. M. Vasyliunas, Theoretical models of magnetic field line merging 1, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **13**, 303 (1975)
- V. M. Vasyliunas, Steady state aspects of magnetic field line merging, in *Magnetic Reconnection in Space and Astrophysical Plasmas*, *Geophys. Monogr. Ser.*, vol. 30, edited by E. W. Hones, Jr., p. 25, AGU, Washington D.C. (1984)
- G. Wassermann, *Stability of Unfoldings*, Springer (1974)
- L. Woltjer, L., A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **44**, 489 (1958)
- T. Yeh, and W.I. Axford, On the re-connexion of magnetic field lines in conducting fluids, *J. Plasma Phys.*, **4**, 207 (1970)
- W. Zwingmann, Theoretical study of onset conditions for solar eruptive processes, *Solar Phys.*, **111**, 309 (1987)

Lebenslauf

Name	Hesse
Vorname	Michael
Geburtsdatum	24.03.1958
Geburtsort	Hagen/Westfalen
Eltern	Josef Hesse Margret Hesse, geb. Berger
Grundschule	1964 – 1968 Pelmke Grundschule Hagen
Gymnasium	1968 – 1972 Fichte Gymnasium Hagen 1972 – 1977 Märkisches Gymnasium Schwelm
Abitur	Juni 1977
Bundeswehr	Juli 1977 – September 1978 in Wuppertal
Studium	ab Wintersemester 1978/79 Ruhr-Universität Bochum
Studienfach	Physik
Vordiplom	August 1980
Beurlaubung	September 1980 – September 1981 Studium an der University of Sussex, England
Diplomarbeit	Physik, 1983 – 1985 "Bifurkationstheoretische Behandlung von Stromschichten"
Diplom	April 1985

